کنترل اتوماتیک

مراجع درس: Modern Control Engineering, Ogata, 5th
Modern Control System, Dorf, B (2016)

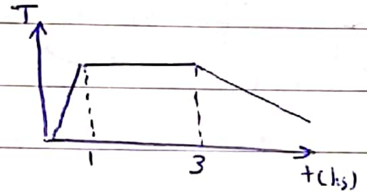
سیلابس: ۱- مقدمه‌ای بر سیستم‌های کنترلی
۲- مدل‌سازی ریاضی سیستم‌های کنترل
۳- " " " " " مکانیکی و الکتریکی
۴- " " " " " سیالاتی
۵- تحلیل پاسخ گذرا و ماندگار
۶- مکان هندسی ریشه‌ها
۷- تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترلی با استفاده از مکان هندسی ریشه‌ها
۸- " " " " " " پاسخ فرکانسی
۹- طراحی کنترلر PID

نمرات: تمرین ۳
پروژه ۲
میان‌ترم ۶
پایان‌ترم ۹

فصل اول) مقدمه

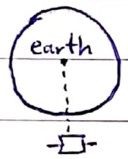
هدف کنترل: فراهم کردن شرایط مطلوب برای یک سیستم دینامیکی است. معمولاً می‌خواهیم یک کمیت فیزیکی (مثل دما، فشار، سرعت، مکان و ...) از یک سیستم دینامیکی را در یک مقدار مطلوب کنترل کنیم.

مثال) - کنترل پروفیل دمای یک کوره

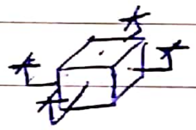


- کنترل دور ماشین لباسشویی

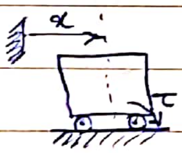
- کنترل جهت‌گیری ماهواره



- کنترل پرنده کوادکوپتر



اجزای مختلف سیستم‌های کنترل: ۱- سیستم دینامیکی (Process or Plant): یک یا چند ورودی و یک یا چند خروجی دارد و رفتار آن توسط یک یا چند معادله دیفرانسیل توصیف می‌شود.



مثال) x مکان ارابه (خروجی)
τ گشتاور تولید شده توسط موتور (ورودی)
جهت کنترل مکان ارابه (ورودی)

$m\ddot{x} = \frac{\tau}{r}$ ⟵ معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت

- وقتی می‌خواهیم دمای یک اتاق را کنترل کنیم، سیستم دینامیکی مورد نظر خود محیط است.
- کنترل وضعیت یا جهت ماهواره: سیستم دینامیکی مورد نظر خود جسم ماهواره است که ۳ معادله دیفرانسیل حاکم بر دینامیک دورانی ماهواره است.

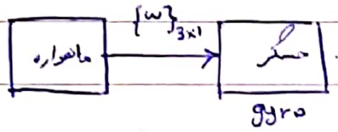
۲- حسگر (Sensor): برای این که بتوان خروجی سیستم دینامیکی را در مقداری مطلوب کنترل کرد، باید در ابتدا بتوانیم خروجی سیستم کنترلی را به وسیله ابزاری اندازه‌گیری کنیم. این ابزار حسگر نام دارد.

مثال) در حالت کنترل دمای اتاق حسگر دماسنج است.
کنترل وضعیت ماهواره ← حسگر ← حسگر خورشید، حسگر ستاره، ژایرو، مغناطیس‌سنج

کنترل کوادکوپتر در داخل محیط بسته ؛ می‌توان از مثلث‌بندی دوربین‌ها استفاده نمود.

IMU : Internal measurement unit
با IMU جهت‌گیری انجام می‌شود و با GPS اندازه‌گیری موقعیت و سرعت.

حسگر مطلوب دارای این ویژگی است که خروجی را بدون دینامیک اضافی با بردن تا حد ممکن با حداقل noise و bias و scale کردن اندازه‌گیری کند.



$$\{\omega_m\} = [S]_{3\times3}\{\omega\} + \{b\} + \{noise\}$$

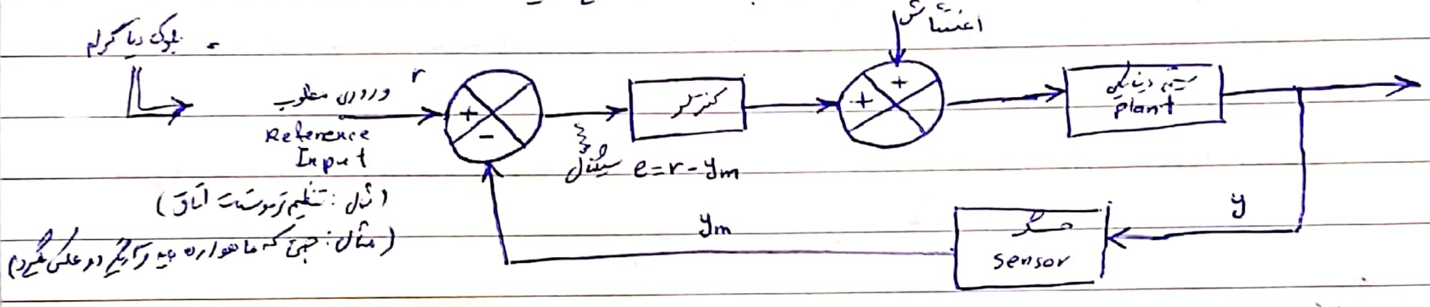
ماتریس فاکتور و مقیاس کردن
بایاس
یعنی از صفر تا شروع می‌شود
نویز ها

EKF : فیلترهایی که همزمان با هم گرفتن نویز، بایاس و اسکیل را هم درست می‌کنند با الگوریتم های خاصی که دارد.

حالت ایده‌آل کلی این است که $\{b\}$ یا $\{noise\}$ صفر بوده و یا $[S]$ همانی باشد و اگر نشود بدانیم که چه هستند تا در نهایت آن مقدار را کم کنیم.

noise : یک توزیع گاوسی دارد که مقدار متوسط آن را به ما می‌دهد و آن را در یک لحظه خاص به ما نمی‌دهد.

۳- ورودی مطلوب (یا مرجع) (Desired or Refrence Input) : خروجی مطلوب برای سیستم دینامیکی توسط این سیگنال مشخص می‌شود.



هدف از علم کنترل این است که خطا (e) تا حد امکان (محدودیت اقتصادی) به صفر میل کند.

۴- اغتشاش یا Disturbance

اغتشاش حرکت‌های نامطلوب و غیرقابل پیش‌بینی هستند که سیستم دینامیکی وارد می‌شوند و ما کنترلی روی زمان یا اندازه آن نداریم.

مثال : ماهواره ← گشتاورهای اغتشاشی مثل گشتاور گرادیان (gravity gradient)

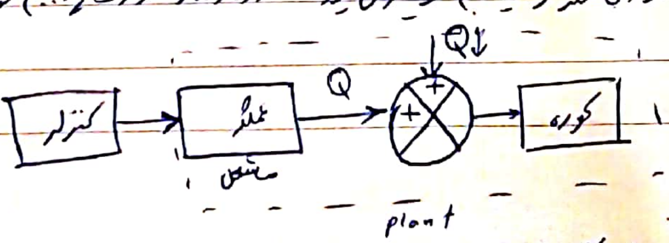
کوادکوپتر ← گشتاورهای ناخواسته اعمال شده توسط باد

کنترل دمای اتاق ← باز و بسته شدن درها و پنجره ها

تأخیر هم دینامیک حسگر و عملگر بستگی دارد.

۵- کنترلر : کنترلر بر اساس مقدار خطا یک سیگنال تولید می‌کند تا خروجی سیستم دینامیکی را به مقدار مطلوب برساند (یعنی خطا را به سمت صفر میل دهد). کنترلر نیز همانند سیستم دینامیکی دارای یک یا چند ورودی و یک یا چند خروجی باشد.

۶- عملگر یا actuator : ابزاری است که بر اساس خروجی کنترلر یک تابع تحریک (مثل نیرو، گشتاور، ولتاژ، حرارت و ...) تولید نموده و به سیستم دینامیکی اعمال می‌کند.



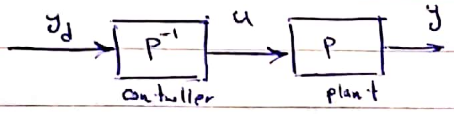
مثال: کنترل دمای کوره

مثلا در کوادکوپتر چرخ‌های (فن) ما عملگر هستند.

در اغلب موارد عملگر و سیستم دینامیکی را هم plant در نظر می‌گیریم.

کنترل مدار باز (Open-loop Control)

در صورتی که یک مدل دقیق از سیستم دینامیکی که می خواهیم کنترل کنیم داشته باشیم (مثلاً فرض کنید مدل دقیق دینامیک سیستم P باشد) در آن صورت می توانیم از معکوس مدل دینامیکی سیستم به عنوان کنترلر استفاده کنیم (یعنی کنترلر ما P^{-1} خواهد بود) آنقدر کاربرد ندارد که نیست ولی خوب نیست و feedback درست نمی دهد چون دقیقاً معکوس است.



مثال می توانی راه رفتن باشد، بدانیم چگونه باید برویم که به در برخوریم ولی اغتشاشات می تواند خراب کند.

ولی مثلاً در اثر برخورد با ... کاربرد ندارد چون ما کنترلر خیلی خوب نیاز داریم

$$u = P^{-1} y_d$$

$$y = Pu \quad \rightarrow y = PP^{-1} y_d = y_d$$

به دو دلیل کفایت نمی کند: ۱- این که معمولاً مدلی که از سیستم دینامیکی داریم دقیق نیست، فرض کنید ما مدل $\hat{P}$ را داریم که $\hat{P} \neq P$ است، بنابراین

$$\hat{P}^{-1} P \neq 1 \Longrightarrow y \neq y_d$$

۲- به علت وجود اغتشاشات وارد شده به سیستم دینامیکی، خروجی سیستم از مقدار مطلوب فاصله می گیرد. از آن جایی که در کنترل حلقه باز تغییر در خروجی سیستم دینامیکی تأثیر روی خروجی کنترلر ندارد بنابراین اصلاحی صورت نگرفته و خروجی سیستم از مقدار مطلوب فاصله می گیرد.

به این ۲ دلیل استفاده از کنترل حلقه باز به تنهایی کفایت نمی کند.

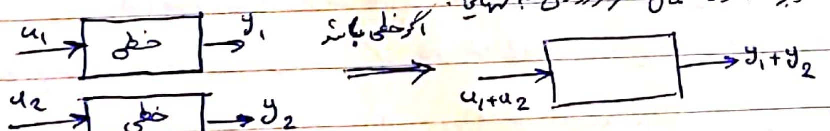
فصل ۲) مدلسازی ریاضی سیستم های کنترل

مقدمه: طراح یک سیستم کنترلی در قدم اول باید بتواند یک مدل ریاضی از سیستم دینامیکی ایجاد کند. سیستم های دینامیکی که عموماً مکانیکی، الکتریکی، مغناطیسی، حرارتی، سیالاتی، زیستی و ... هستند از یک یا چند معادله دیفرانسیل به عنوان مدل تبعیت می کنند.

برای استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت از قوانین فیزیکی حاکم بر سیستم دینامیکی استفاده می کنیم. مثلاً برای استخراج معادلات دیفرانسیل یک پاندول ۲ درجه آزادی از قوانین نیوتن استفاده می کنیم. یا برای معادله حاکم بر مدار از KVL و KCL استفاده می کنیم.

برای طراحی کنترلر برای یک سیستم کنترلی لازم است در ابتدا معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم را استخراج کنیم تا با استفاده از این معادلات و تحلیل آن ها بتوانیم در مراحل بعد کنترلر را طراحی و حلقه کنترلی را شبیه سازی کنیم.

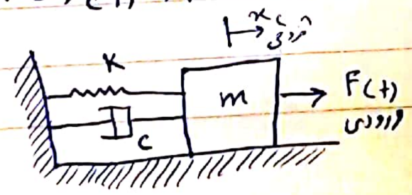
سیستم دینامیکی خطی) سیستمی است که اصل برهم نهی برای آن برقرار باشد. بر اساس این اصل خروجی یک سیستم دینامیکی خطی به ازای اعمال همزمان ۲ ورودی مختلف برابر است با مجموع خروجی سیستم دینامیکی مربوط به ازای اعمال هر ورودی به تنهایی.



سیستم دینامیکی خطی غیر متغیر با زمان: سیستمی است که پارامترهای آن با زمان عوض نمی شوند.

مثال)

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t)$$



s.a.m

سیستم دینامیکی خطی بلا چون k و m و c ثابت اند غیر متغیر با زمان است اما مثلاً ماهواره‌ای که سوخت می‌سوزاند و جرمش تغییر می‌کند متغیر با زمان است

سیستم دینامیکی غیرخطی

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = \tau \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{\tau}{m}$$

به خاطر θ غیرخطی است.

اما در θ های خیلی کوچک این سیستم خطی می‌شود اما اگر پاندول شود چون فقط در اطراف زوایای کم قرار است کنترل شود خطی است.

تابع تبدیل (Transfer function) : در تئوری کنترل برای ارتباط بین ورودی و خروجی یک سیستم دینامیکی خطی غیر متغیر با زمان از مفهوم تابع تبدیل استفاده می‌شود.

تابع تبدیل نسبت لاپلاس خروجی یک سیستم دینامیکی خطی غیر متغیر با زمان به لاپلاس ورودی آن‌ها به ازای صفر بودن تمامی شرایط اولیه سیستم است.

سیستم دینامیکی خطی غیر متغیر با زمان مرتبه n را در نظر بگیرید:

مشتق

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1}\dot{x} + b_m x \qquad m \leq n$$

$x(t)$: ورودی سیستم دینامیکی $y(t)$: خروجی سیستم دینامیکی a_i, b_i: هم ضرایب ثابت هستند.

∴ نمی‌توانند خطی نباشند مثلاً $\sin$ باشند حتماً ضرایب باید ثابت باشند یا تغییر زمان

با فرض صفر بودن تمامی شرایط اولیه و تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین بالا داریم:

$$s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \dots + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) = b_0 s^m X(s) + \dots + b_{m-1} s X(s) + b_m X(s)$$

$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t) e^{-st} dt \\ X(s) &= \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{G(s)}_{\text{تابع تبدیل}} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

چند نکته: ۱) با استفاده از تبدیل لاپلاس توانستیم معادلات دینامیکی حوزه زمان را به معادلات جبری حوزه s ببریم.

۲) تابع تبدیل یک سیستم دینامیکی، ذات آن سیستم است و به ورودی بستگی ندارد.

~~۳) تابع تبدیل یک سیستم دینامیکی مشخص باشد می‌توان به ازای اعمال ورودی های مختلف در برای رفتار خروجی تابع تبدیل را بدست آورد~~

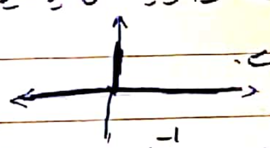
۳) تابع تبدیل ۲ سیستم دینامیکی با فیزیک های مختلف می‌تواند یکسان باشد (مثلاً مکانیکی و الکتریکی)

۴) در صورتی که تابع تبدیل یک سیستم دینامیکی مشخص باشد می‌توان به ازای اعمال ورودی های مختلف رفتار سیستم را بررسی کرد.

۵) در صورتی که تابع تبدیل یک سیستم دینامیکی مشخص نباشد می‌توان با اعمال ورودی های مختلف و بررسی رفتار خروجی تابع تبدیل را بدست آورد.

پاسخ سیستم به ازای ورودی ضربه: فرض کنید تمامی شرایط اولیه یک سیستم دینامیکی صفر باشد اگر به این سیستم دینامیکی خطی غیر متغیر با زمان ورودی ضربه وارد کنیم داریم:

ضربه واحد: $u(t) = \delta(t)$



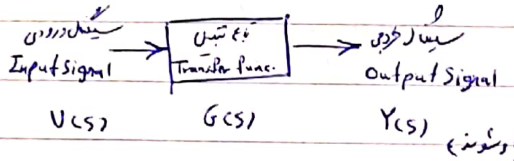
مساحت زیرش ۱ است. $\mathcal{L}(u(t)) = U(s) = 1$

$$\underbrace{Y(s)}_{\text{پاسخ ضربه}} = \underbrace{G(s)}_{\text{تابع تبدیل}} \underbrace{U(s)}_{1} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) \rightarrow y(t) = g(t)$$

Scanned by CamScanner

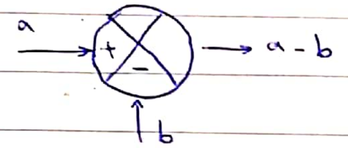
* اگر یک سیستم دینامیکی ، تابع تبدیل نداشتیم به ضربه پیش می‌رویم. اگر از خروجی لاپلاس معکوس سیستم بگیریم تابع تبدیل به دست میاد ، پاسخ ضربه همان تابع تبدیل است.
در صورتی که به سیستم ضربه‌ای واحد بدهیم و خروجی سیستم را به صورت تابعی از زمان ثبت کنیم می‌توانیم با لاپلاس گرفتن از خروجی تابع تبدیل سیستم دینامیکی خطی غیر متغیر با زمان را بیابیم.

بلوک دیاگرام (Block diagram) : برای نمایش اجزای مختلف یک سیستم کنترلی از مفهوم بلوک دیاگرام استفاده می‌شود. بلوک دیاگرام یک شیوه نمایش تصویری المان‌های سیستم و جریان سیگنال‌ها می‌باشد. سیگنال‌ها در جهت فلش حرکت می‌کنند.

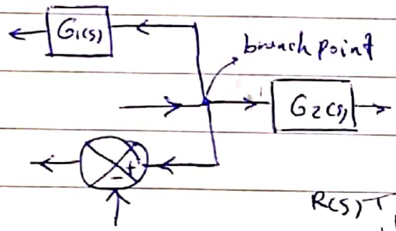


$Y(s) = G(s)\,U(s)$

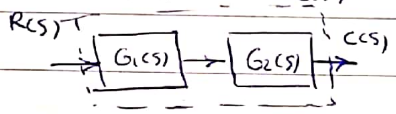
نقطه جمع (Summing point) : نقطه‌ای که در آن‌ها چند سیگنال به هم می‌رسند و با هم جمع یا تفریق می‌شوند.



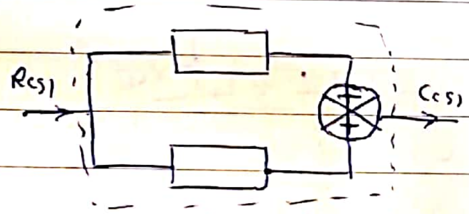
نقطه انشعاب (Branch Point) : نقطه‌ای از آن سیگنال هم‌زمان به چند جای دیگر می‌رود.



$G(s) = G_1(s)\,G_2(s)$



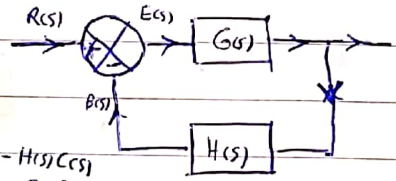
بلوک‌های سری : $C(s) = G_1(s)G_2(s)R(s)$



بلوک‌های موازی : $C(s) = (G_1(s) + G_2(s))R(s)$

$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$

مثال) بلوک دیاگرام یک سیستم کنترلی مدار بسته :
تابع تبدیل معادل؟



$E(s) = R(s) - B(s)$

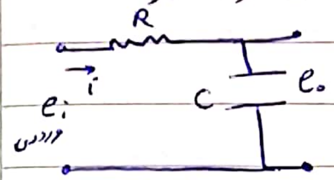
$C(s) = G(s)\,E(s)$

$B(s) = H(s)\,C(s)$ ~~H/H(s)~~

$\Rightarrow E(s) = R(s) - H(s)C(s) \rightarrow \dfrac{C(s)}{G(s)} = R(s) - H(s)C(s)$

$C(s)\left(\dfrac{1}{G(s)} + H(s)\right) = R(s) \Rightarrow C(s) = \boxed{\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}}\,R(s)$ تابع تبدیل معادل

مثال) مدار الکتریکی زیر را در نظر بگیرید. اگر e_i ورودی و e_o خروجی این سیستم باشد، معادلات حاکم بر این سیستم و تابع تبدیل سیستم و همچنین بلوک دیاگرام ارتباط دهنده بین ورودی و خروجی این سیستم را ترسیم نمائید.

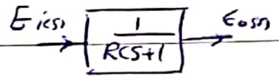


$e_i - Ri(t) - e_o = 0$ (I)

$q = ce_o$

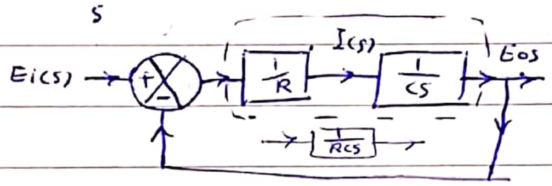
$q = \int i\,dt \rightarrow \int i\,dt = ce_o$ (II)

یک بلوک :

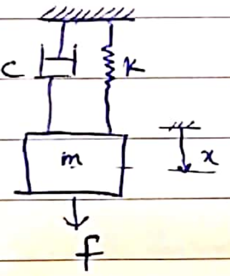


$\mathcal{L}(I) \Rightarrow E_i(s) - RI(s) - E_o(s) = 0$

$\mathcal{L}(II) \Rightarrow \frac{I(s)}{s} = CE_o(s) \Rightarrow E_i(s) - RCSE_o(s) - E_o(s) = 0 \Rightarrow E_o(s) = \frac{E_i(s)}{RCS+1}$

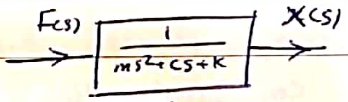


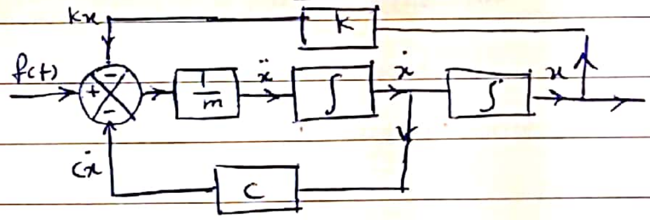
مثال) معادله حاکم بر سیستم ارتعاشی زیر را بیابید و تابع تبدیل سیستم را بیابید و ارتباط بین ورودی (نیرو) و خروجی (جابجایی جرم) را به صورت بلوک دیاگرام نشان دهید.

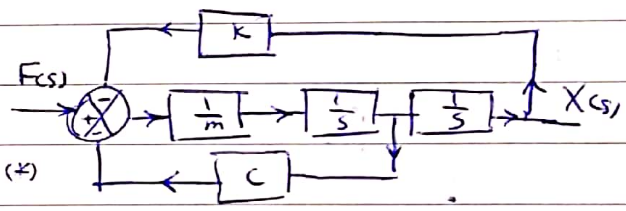


$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \Rightarrow ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s)$

$\Rightarrow \frac{F(s)}{X(s)} = ms^2 + cs + k \Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+k} = G(s)$



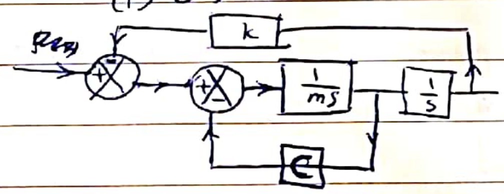




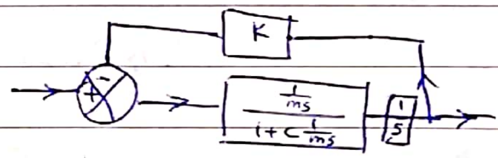
حوزه زمان (t)

حوزه S

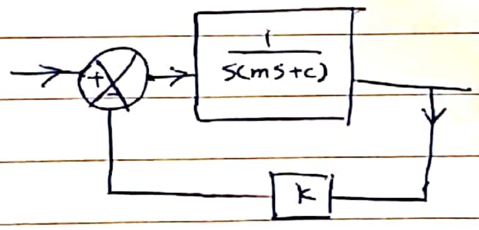
(*) →



⇒

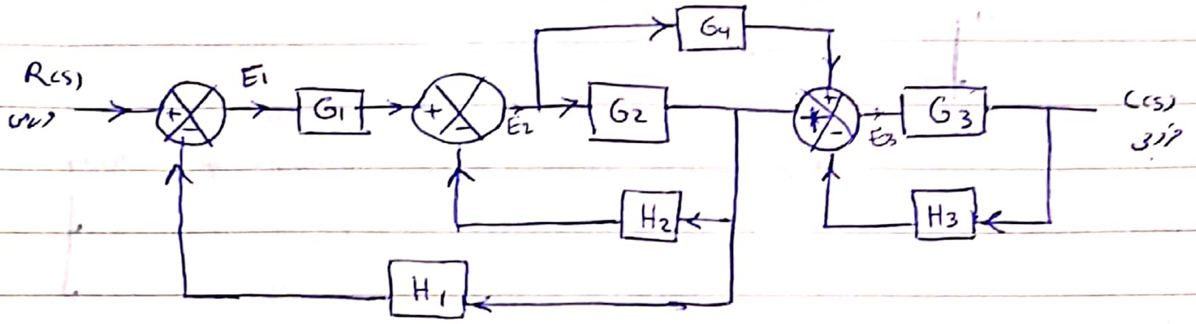


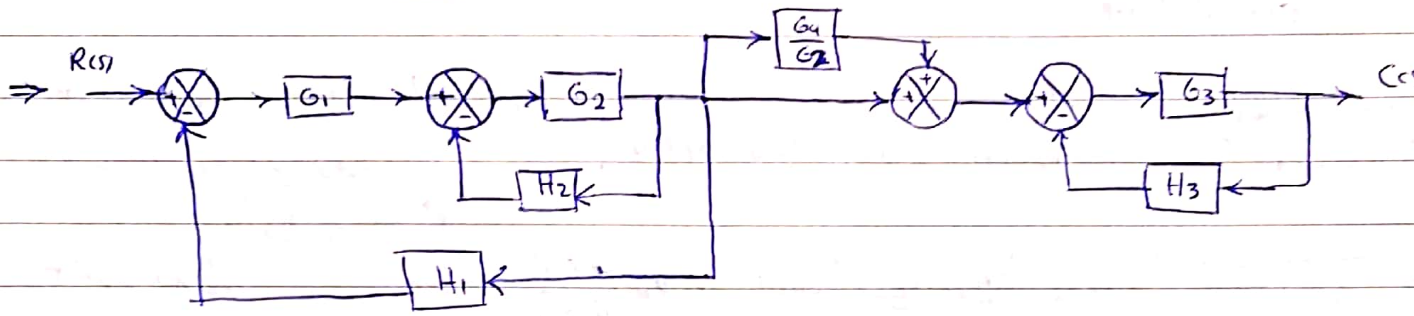
⇒

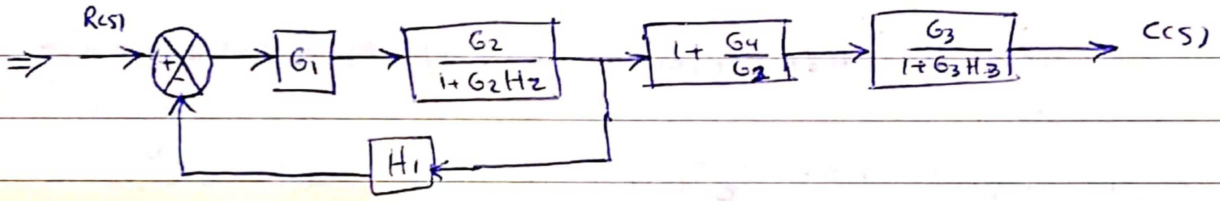


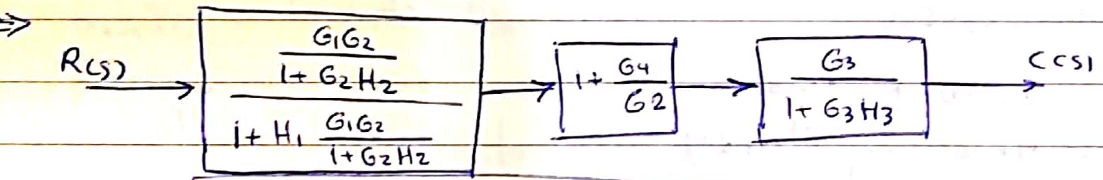
$G = \frac{\frac{1}{s(ms+c)}}{1+\frac{k}{s(ms+c)}} = \frac{1}{ms^2+cs+k}$

ساده سازی بلوک دیاگرام‌ها: گاهی اوقات بلوک دیاگرام سیستم کنترلی مورد نظر ما از حلقه‌های زیادی تشکیل شده است. اغلب موارد ما به دنبال این هستیم که رابطه بین ورودی و خروجی سیستم را به صورت یک تابع تبدیل به دست آوریم. برای این کار از ساده سازی بلوک دیاگرام‌ها استفاده می‌شود.









$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{G_1 G_3 (G_2 + G_4)}{(1+G_3H_3)(1+G_2H_2+G_1G_2H_1)}}$$

نکته: گاهی اوقات روش ساده سازی که در این مثال گفتیم به راحتی قابل پیاده سازی نیست در این صورت یک روش دیگر برای تعیین تابع تبدیل بین ورودی و خروجی استفاده از یک سری متغیرهای کمکی و نوشتن چند معادله چند مجهول است

$$\begin{cases} E_1 = R - G_2H_1E_2 \\ E_2 = E_1G_1 - G_2H_2E_2 \\ E_3 = E_2G_4 + E_2G_2 - CH_3 \end{cases}$$

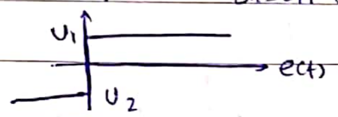
حال هدف حذف کردن متغیرهای کمکی و یافتن رابطه بین C و R است: از رابطه دوم E_1 را برحسب E_2 به دست آورده و در معادله اول قرار می‌دهیم تا E_2 برحسب R به دست آید. حاصل را در معادله سوم قرار می‌دهیم. همچنین در رابطه سوم به جای E_3 از $\frac{C}{G_3}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین یک معادله داریم که در آن فقط R و C ظاهر شده‌اند و دیگر متغیرهای کمکی نیستند. بنابراین می‌توان $\frac{C}{R}$ یا همان تابع تبدیل سیستم را یافت:

معرفی چند کنترلر صنعتی

۱ـ کنترلر روشن‌خاموش (کنترلر دوحالتی) on-off Controller

$e(t) \rightarrow$ کنترلر $\rightarrow u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} \text{if } e(t) \geq 0 & U_1 \\ \text{if } e(t) < 0 & U_2 \end{cases}$$

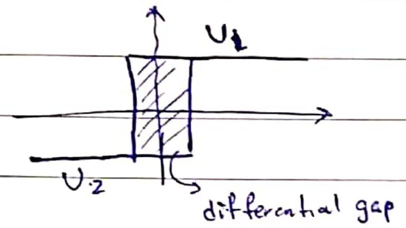


در بعضی موارد U_2 منفی U_1 است یا اینکه یکی از آن‌ها صفر است

استفاده از differential gap برای خراب نشدن عملگر و اجزای سیستم کنترل

مزایا: جلوگیری از خرابی اجزاء

معایب: کم شدن دقت کنترلر



۲ـ کنترلر تناسبی Proportional Controller

$e(t) \rightarrow$ کنترلر $\rightarrow u(t)$

$\boxed{u(t) = \overset{\text{ضریب ثابت}}{k_p} e(t)}$ or $\boxed{U(s) = k_p E(s)}$

دوست داریم k_p بالا ببریم ولی محدودیت‌هایی داریم

$k_p \uparrow \Rightarrow$ سرعت / دقت بالا

۳ـ کنترلر انتگرال‌گیر Integrator

$e(t) \rightarrow$ کنترلر $\rightarrow u(t)$

$\boxed{u(t) = k_I \int_0^t e(t)\,dt = \frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(t)\,dt}$ or $\boxed{U(s) = \frac{k_p}{T_i} \frac{E(s)}{S}}$

۴ـ کنترلر تناسبی انتگرال‌گیر PI

$e(t) \rightarrow$ کنترلر $\rightarrow u(t)$

$$u(t) = k_p e(t) + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(t)\,dt = k_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t)\,dt \right)$$

T_i ← ثابت زمانی انتگرال‌گیری

۵ـ کنترلر تناسبی ـ مشتق‌گیر PD

$e(t) \rightarrow$ کنترلر $\rightarrow u(t)$

$$u(t) = k_p e(t) + k_D \dot{e}(t) = k_p (e(t) + T_d \dot{e}(t))$$

or $U(s) = k_p E(s) + k_D S E(s)$

کاهش نوسانات / بیدار کننده / پیشگو

۶ـ کنترلر تناسبی ـ انتگرال‌گیر ـ مشتق‌گیر PID:

P I D

$e(t) \rightarrow$ کنترلر $\rightarrow u(t)$

$$u(t) = k_p e(t) + k_D \dot{e}(t) + k_i \int_0^t e(t)\,dt$$

$$\text{or } u(t) = k_p \left(e(t) + T_D \dot{e}(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t)\,dt \right)$$

$$\text{or } U(s) = k_p E(s) + k_D S E(s) + k_i \frac{1}{S} E(s)$$

ـ فضای حالت (استخراج معادلات دینامیکی در فضای حالت)

ـ متغیر حالت: برای توصیف رفتار یک سیستم دینامیکی کوچکترین مجموعه متغیر (که به آن متغیر حالت می‌گوییم) که با داشتن آن‌ها در زمان t_0 و داشتن ورودی برای $t \geq t_0$ بتوان رفتار سیستم دینامیکی را برای تمام $t \geq t_0$ تعیین نمود می‌باشد.

ـ بردار حالت (state vector): مجموعه متغیرهای حالت یک سیستم دینامیکی را بردار حالت می‌گویند. مثلاً بردار حالت یک سیستم دینامیکی با n متغیر حالت را یک بردار $n \times 1$ گویند.

$$\{x\}_{n\times 1} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

x_1 ← متغیر حالت اول

x_n ← متغیر حالت n ام

ـ فضای حالت: state space یک فضای برداری n بعدی را در نظر بگیرید که محورهای مختصات آن که همان متغیرهای حالت باشند. به این فضا فضای حالت می‌گویند.

برای نوشتن فرم فضای حالت معادلات یک سیستم دینامیکی موارد زیر لازم است:

$$\begin{cases} \text{بردار حالت } \{x(t)\}_{n\times 1} : \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} \\ \text{بردار ورودی‌ها} : \{u(t)\}_{r\times 1} : \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)\} \end{cases}$$

تعداد متغیرهای حالت = درجه [illegible]

تعداد ورودی‌ها

بردار خروجی‌ها $\{y(t)\}_{m\times 1} : \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)\}$

تعداد خروجی‌ها

معادلات یک سیستم دینامیکی در فضای حالت به صورت کلی زیر است.

این تعداد از روی معادلات (درجه مشتق) آنها بدست آوریم.

معادلات دینامیکی

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{cases}$$

معادلات خروجی

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_3 = g_3(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{cases}$$

فرم برداری معادلات به صورت زیر می‌باشد:

$$(*)\begin{cases} \{\dot{x}\}_{n\times 1} = \{f(\{x\}_{n\times 1}; \{u\}_{r\times 1}; t)\} \\ \{y\}_{m\times 1} = \{g(\{x\}_{n\times 1}; \{u\}_{r\times 1}; t)\} \end{cases}$$

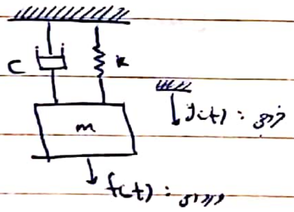
در صورتی که معادلات بالا را حول نقطه خطی‌سازی کنیم داریم:

$$(*)\begin{cases} \{\dot{x}\}_{n\times 1} = \underbrace{[A(t)]_{n\times n}}_{\text{ماتریس حالت}}\{x(t)\}_{n\times 1} + \underbrace{[B(t)]_{n\times r}}_{\text{ماتریس ورودی}}\{u(t)\}_{r\times 1} \\ \{y(t)\}_{m\times 1} = \underbrace{[C(t)]_{m\times n}}_{\text{ماتریس خروجی}}\{x(t)\}_{n\times 1} + \underbrace{[D(t)]_{m\times r}}_{\text{ماتریس انتقال مستقیم}}\{u(t)\}_{r\times 1} \end{cases}$$

مثال) سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

الف) معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم را بیابید.

ب) معادلات حرکت را به فرم ~~معادلات~~ فضای حالت بنویسید و ماتریس‌های A و B و C و D را بیابید.



حل:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t)$$

نکته: تعداد متغیرهای حالت از روی مرتبه معادله دیفرانسیل بدست می‌آید.

$$\begin{cases} n = 2 \\ x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -\frac{c}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{f}{m} = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}f \xrightarrow{(*)} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$y = x_1 = \underbrace{[1\ 0]}_{C}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{0}_{D}\times f \Rightarrow \begin{cases} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \{\dot{x}\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{Bmatrix} f(t) \\ y = [1\ \ 0]\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

فرم فضای حالت

از معادله حالت برای حل شبیه‌سازی و طراحی کنترل استفاده می‌شود.

- استخراج تابع تبدیل یا transfer function یک سیستم دینامیکی از روی معادلات فضای حالت

ابتدا سیستم تک ورودی ($r=1$) تک خروجی ($m=1$) را در نظر میگیریم

$$\begin{cases} \{\dot{x}\} = [A]\{x\} + \{B\}u \\ y = [C]\{x\} + Du \end{cases}$$

برای بدست آوردن تابع تبدیل سیستم کافی است از طرفین تبدیل لاپلاس بگیریم (با فرض شرایط اولیه صفر):

$$\begin{cases} s\{X(s)\} = [A]\{X(s)\} + \{B\}U(s) \\ Y(s) = [C]\{X(s)\} + DU(s) \end{cases}$$

$$\longrightarrow (s[I]_{n\times n} - [A])\{X(s)\} = \{B\}U(s) \longrightarrow \{X(s)\} = (s[I] - [A])^{-1}\{B\}U(s)$$

$$Y = [C](s[I] - [A])^{-1}\{B\}U(s) + DU(s)$$

تعریف تابع تبدیل بین ورودی و خروجی

$$\longrightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \underset{1\times n}{[C]}\,\underset{n\times n}{(s[I] - [A])^{-1}}\,\underset{n\times 1}{\{B\}} + \underset{1\times 1}{D}$$

نکته: در حالتی که m خروجی و r ورودی داریم تابع تبدیل سیستم یک ماتریس $m\times r$ است که بصورت زیر بدست می‌آید:

$$[G(s)]_{m\times r} = [C]_{m\times n}(s[I]_{n\times n} - [A]_{n\times n})^{-1}[B]_{n\times r} + [D]_{m\times r}$$

مثال: برای کالسکه از روی معادلات فضای حالت تابع تبدیل بین ورودی و خروجی را بیابید.

$$G(s) = [1\ 0]\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{Bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{Bmatrix} + 0 = [1\ 0]\begin{bmatrix}s & -1\\ \frac{k}{m} & s+\frac{c}{m}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{Bmatrix} = [1\ 0]\frac{1}{s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}}\begin{bmatrix}s+\frac{c}{m} & 1\\ -\frac{k}{m} & s\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{Bmatrix}$$

$$\longrightarrow G(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2+\frac{c}{m}s+\frac{k}{m}} = \frac{1}{ms^2+cs+k}$$

- تعیین فرم فضای حالت یک سیستم دینامیکی از روی معادله حرکت

الف) در معادله دیفرانسیل حرکت مشتقات ورودی وجود ندارد.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u(t) \quad (\star)$$

u: ورودی — n: تعداد متغیرهای حالت

y: خروجی

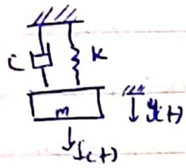
$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = \frac{d}{dt}y^{(n-2)} = y^{(n-1)} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \dots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + u(t) \end{cases}$$

$$[A]_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & & -a_1 \end{bmatrix} \quad \{B\} = \begin{Bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{Bmatrix}_{n\times 1} \quad [C] = [1\ 0\ \dots\ 0] \quad D = 0$$

نکته: همانطور که قبلاً گفتیم می‌توان فرم‌های مختلفی برای فضای حالت یک سیستم دینامیکی نوشت (شکل مثال)

یادآوری: $m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=f(t)$

$$\begin{cases} x_1=y \\ x_2=\dot{y} \end{cases}$$



حال → $\begin{cases} x_1=3y \\ x_2=y+\dot{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\frac{x_1}{3} \\ \dot{y}=x_2-\frac{x_1}{3} \end{cases}$

با تعیین $\dot{x}_1$ و $\dot{x}_2$ برحسب x_1 و x_2 و f می‌توان ماتریس‌های جدید A و B را یافت.

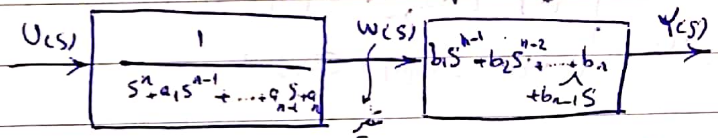
$[C]=[\frac{1}{3}\quad 0]$ $\quad D=0$

ب) مشتق ورودی در معادله دیفرانسیل سیستم ظاهر گردد:

حالت اول: $(**)\quad y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny(t)=b_1u^{(n-1)}+b_2u^{(n-2)}+\dots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu(t)$

در حالت اول ضریب $u^{(n)}$ صفر است

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_1S^{n-1}+b_2S^{n-2}+\dots+b_{n-1}S+b_n}{S^n+a_1S^{n-1}+a_2S^{n-2}+\dots+a_{n-1}S+a_n}$$



$$\begin{cases} x_1=w(t) \\ x_2=\dot{w}(t) \\ x_3=\ddot{w}(t) \\ \vdots \\ x_n=w^{(n-1)}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}=x_n \\ \dot{x}_n=-a_nx_n-a_{n-1}x_2-\dots-a_1x_n+u(t) \end{cases}$$

اگر متغیرهای w(t) برای فرم فضای حالت را بنویسیم از روابط بالا استفاده می‌کنیم:

$$Y(s)=(b_1S^{n-1}+b_2S^{n-2}+\dots+b_{n-1}S+b_n)W(s)$$

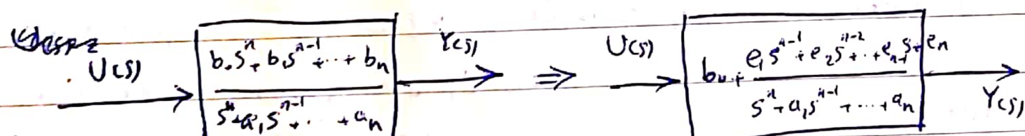
$$\rightarrow y(t)=b_1w^{(n-1)}(t)+b_2w^{(n-2)}(t)+\dots+b_{n-1}\dot{w}(t)+b_nw(t)=b_1x_n(t)+b_2x_{n-1}(t)+\dots+b_{n-1}x_2(t)+b_nx_1(t)$$

$$[C]=[b_n\ \ b_{n-1}\ \ b_{n-2}\ \dots\ b_2\ \ b_1]$$

بنابراین برای معادله دیفرانسیل (**) ماتریس‌های فضای حالت [A] و [B] کاملاً مثل ماتریس‌های [A] و [B] معادله (*) هستند و فقط ماتریس [C] متفاوت است و D در هر دو حالت صفر است. $D=0$

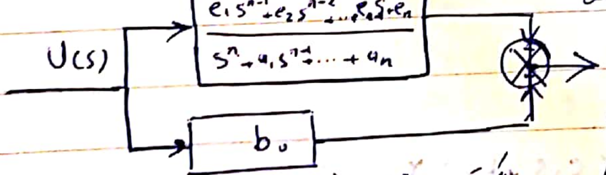
حالت دوم: (ضریب $u^{(n)}(t)$ غیر صفر باشد)

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny(t)=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\dots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu$$



ضرایب e با تقسیم

$a_1b_0+e_1=b_1 \rightarrow e_1=b_1-a_1b_0 \rightsquigarrow e_1, e_2, \dots, e_n$



بنابراین برای این حالت [A] و [B] مشابه قسمت الف و [C] و [D] به صورت زیر هستند:

$[C]=[e_n\ \ e_{n-1}\ \dots\ e_1]$

$[D]_{1\times1}=b_0$

یک قسمت اضافه که به D اضافه می‌شود.

فصل سوم) مدل‌سازی ریاضی سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی

بخش ۳-۱. مدلسازی سیستم‌های مکانیکی

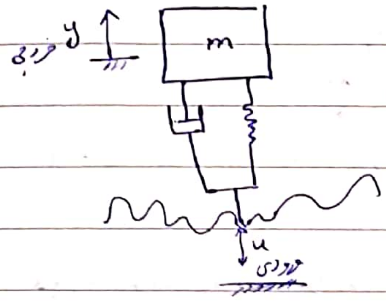
مقدمه: برای مدلسازی سیستم‌های مکانیکی از قانون دوم نیوتن استفاده می‌شود.

مثال) مدل ساده سیستم تعلیق یک خودرو را به صورت مقابل در نظر بگیرید.

الف) معادلات این سیستم را استخراج نمایید. سیستم چند درجه آزادی است؟

ب) فرم فضای حالت معادلات را بنویسید.

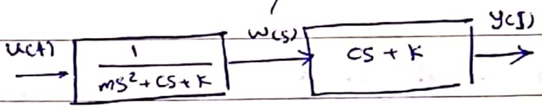
ج) تابع تبدیل بین ورودی و خروجی را بیابید.



$$m\ddot{y} + c(\dot{y}-\dot{u}) + k(y-u) = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = c\dot{u} + ku$$

متغیر کمکی

D.o.F = 1 $\Rightarrow$ تعداد متغیرهای حالت $\Rightarrow n=2$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{cs+k}{ms^2+cs+k}$$ تابع تبدیل سیستم

$$\begin{cases} x_1(t) = w(t) \\ x_2(t) = \dot{w}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \{\dot{x}\} = [A]_{2\times2}\{x\} + \{B\}u(t) \\ w(t) = [C_1]\{x\} + [D_1]u \end{cases}$$

$$[A]_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{c}{m} \end{bmatrix} \quad [B]_{2\times1} = \{B\}_{2\times1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{Bmatrix} \quad [C_1]_{1\times2} = [1 \quad 0] \quad D_1 = 0$$

خروجی سیستم

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = cs+k \Rightarrow y(t) = c\dot{w}(t) + kw(t) \Rightarrow y(t) = cx_2(t) + kx_1(t)$$

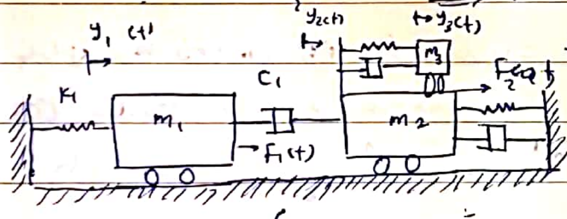
خروجی سیستم

$$y(t) = [C]\{x(t)\} + Du(t)$$

$$\Rightarrow D = 0 \quad , \quad [C]_{1\times2} = [k \quad c]$$

ماتریس خروجی — پارامتر سیستم

مثال) سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید.



ورودی: F_2 و F_1

خروجی: y_1 و y_2 و y_3

الف) سیستم چند درجه آزادی است؟ معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم را بیابید.

ب) تابع تبدیل بین ورودی F_2 و خروجی y_3 را بیابید.

ج) فرم فضای حالت این معادلات را بنویسید.

D.O.F = 3 $\Rightarrow n = 6$: متغیرهای حالت ۲ برابر درجات آزادی

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + c_1(\dot{y}_1-\dot{y}_2) + k_1y_1 = F_1(t) \\ m_2\ddot{y}_2 + c_1(\dot{y}_2-\dot{y}_1) + c_2\dot{y}_2 + k_2y_2 + c_3(\dot{y}_2-\dot{y}_3) + k_3(y_2-y_3) = F_2(t) \\ m_3\ddot{y}_3 + c_3(\dot{y}_3-\dot{y}_2) + k_3(y_3-y_2) = 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{لاپلاس}}$ $(m_1s^2 + c_1s + k_1)Y_1(s) - c_1sY_2(s) = F_1(s)$ (I)

~~$(m_2s^2 + c_2s + k_2)Y_2(s) - c_1sY_1(s)$~~

$(m_2s^2 + c_1s + k_2 + c_3s + k_3)Y_2(s) - c_1sY_1(s) - (c_3s + k_3)Y_3(s) = F_2(s)$ (II)

$(m_3s^2 + c_3s + k_3)Y_3(s) - (c_3s + k_3)Y_2(s) = 0$ (III)

مطلوب: $Y_3(s) = \bigcirc F_1(s) + \bigcirc F_2(s)$

s.a.m

از معادله (I) $Y_1(s)$ را برحسب $Y_2(s)$ بدست می‌آوریم و در معادله‌ی (II) قرار می‌دهیم حال معادله (II) فقط Y_2 و Y_3 را دارد. از این معادله Y_2 را برحسب Y_3 بدست آورده و در معادله‌ی (II) قرار می‌دهیم. حال این معادله فقط برحسب $Y_3(s)$ می‌باشد. با تقسیم طرفین برحسب $Y_3(s)$ به رابطه زیر می‌رسیم:

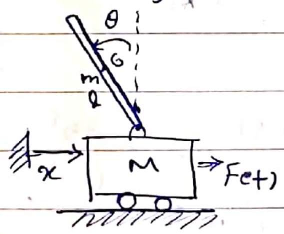
$$Y_3(s) = G_{31}(s)\,F_1(s) + \underbrace{G_{32}(s)}\,F_2(s)$$ ما دنبال این هستیم

فضای حالت?

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 \\
x_2 &= \dot{y}_1 \\
x_3 &= y_2 \\
x_4 &= \dot{y}_2 \\
x_5 &= y_3 \\
x_6 &= \dot{y}_3
\end{aligned}
\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{c_1}{m_1}(x_4 - x_2) - \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{1}{m_1}F_1(t) \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{c_1}{m_2}(x_2 - x_4) - \frac{c_2}{m_2}(x_4) - \frac{k_2}{m_2}x_3 + \frac{c_3}{m_2}(x_6 - x_4) + \frac{k_3}{m_2}(x_5 - x_3) + \frac{1}{m_2}F_2(t) \\
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= \frac{c_3}{m_3}(x_4 - x_6) + \frac{k_3}{m_3}(x_3 - x_5)
\end{aligned}
\right.
$$

$$
[A]_{6\times6} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{k_1}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & 0 & \frac{c_1}{m_1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{c_1}{m_2} & -\frac{(k_2+k_3)}{m_2} & \frac{-(c_1+c_2+c_3)}{m_2} & \frac{k_3}{m_2} & \frac{c_3}{m_2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & \frac{k_3}{m_3} & \frac{c_3}{m_3} & -\frac{k_3}{m_3} & -\frac{c_3}{m_3}
\end{bmatrix}
\qquad
[B]_{6\times2} = \begin{bmatrix}
0 & 0 \\
\frac{1}{m_1} & 0 \\
0 & 0 \\
0 & \frac{1}{m_2} \\
0 & 0 \\
0 & 0
\end{bmatrix}
\qquad
\underset{\text{خروجی}\ \ \text{state}}{[C]_{3\times6}} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
D_{3\times2} = \begin{bmatrix}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0
\end{bmatrix}
$$



می‌خواهیم $\theta = 0$ را کنترل کنیم

مثال) سیستم اینرسی زیر را در نظر بگیرید. (آونگ معکوس)

الف) معادلات حاکم برای مسئله را بدست آورید. (درجات آزادی؟)

ب) معادلات را به فرم فضای حالت ببرید.

ج) معادلات را حول $\theta = 0$ و $\dot{\theta} = 0$ خطی سازی کنید.

د) تابع تبدیل بین $\underset{\text{خروجی}}{\theta(s)}$ و $\underset{\text{ورودی}}{F(s)}$ را بیابید.

$D.O.F = 2$

$q_1 = \theta,\ q_2 = x$

$\mathcal{L} = T - U$

$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_G\cdot\vec{v}_G$

$\vec{v}_G = ?$

$$\left\{\begin{aligned} x_G &= x - \frac{l}{2}\sin\theta \\ y_G &= \frac{l}{2}\cos\theta \end{aligned}\right. \Rightarrow T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 - l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right)$$

$$U = mgy_G = mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x}_G &= \dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_G &= -\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}\right. \qquad \vec{v}_G = \left(\dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{i} - \frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{j} \qquad \begin{aligned} Q_x &= F \\ Q_\theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\delta W = \vec{F}\cdot\delta\vec{r} = F\vec{i}\cdot\delta(x\vec{i}) = F\,\delta x$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = Q_x \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = Q_\theta \end{cases}$$

تعداد نیروهای غیرپتانسیل

$\{Q_\theta, Q_x$ بدست آوردن $\Rightarrow \quad \delta W = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \cdot \delta \vec{r_i}$

معادله اول حرکت:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = Q_x \Rightarrow \boxed{M\ddot{x} + m\left(\ddot{x} - \frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta + \frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta\right) = F}$$

معادله دوم حرکت:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = Q_\theta \Rightarrow \boxed{\left(I_G + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta} - m\frac{l}{2}\ddot{x}\cos\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0}$$

(Hint) روش نیوتن

مومنتم اصل سیستم در راستای محور x: $P_x = M\dot{x} + m\left(\dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)$

$$\Rightarrow \frac{dP_x}{dt} = \sum F_x = F \xrightarrow{\text{معادله اول}} \frac{d}{dt}\left(M\dot{x} + m\left(\dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta\right)\right) = F$$

معادله دوم:

$$\begin{cases} \sum \vec{M}_A = \dot{\vec{H}}_G + \vec{r}_{G/A} \times m\vec{a}_G \\ \text{یا} \\ \sum \vec{M}_A = (\dot{\vec{H}}_A)_{rel} + \vec{r}_{G/A} \times m\vec{a}_A \end{cases} \longrightarrow mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{d}{dt}\left(I_A\dot{\theta}\right) + \frac{l}{2}\left(-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\right) \times m\ddot{x}\,\vec{i}$$

منظور این است که از دید A رابطه گرفتن و صرفا $\dot{\theta}$ و ...

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta = I_A\ddot{\theta} - mg\frac{l}{2}\cos\theta\,\ddot{x}$$

ممکن است شکل ۲ روش یکی نباشد ولی در جواب نهایی یکی هستند.

فضای حالت:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_3 = \theta \\ x_4 = \dot{\theta} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \quad gg\,f(x_1, x_2, x_3, x_4, F) \\ \dot{x}_2 = \cancel{\frac{m}{M+m}} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{\left(-\frac{m^2l^2/4}{M+m}x_4^2\sin x_3\cos x_3 + mg\frac{l}{2}\sin x_3 + m\frac{l}{2}\cos x_3\frac{F}{M+m}\right)}{I_G + m\frac{l^2}{4} - \frac{m^2l^2/4}{M+m}\cos^2 x_3} \end{cases}$$

(*) کمیم داخل پرانتز به خاطر $\ddot{\theta}$ ترش

$$(*)\quad \ddot{x} = \frac{m}{m+M}\frac{l}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) + \frac{F}{M+m}$$

$$gg = \frac{m}{m+M}\frac{l}{2}\left(\dot{x}_4\cos x_3 - x_4^2\sin x_3\right) + \frac{F}{M+M}$$

معادله دوم: $\left(I_G + m\frac{l^2}{4}\right)\ddot{\theta} - m\frac{l}{2}\cos\theta\left(\frac{m\frac{l}{2}}{m+M}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) + \frac{F}{M+M}\right) - mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0$

$$\ddot{\theta}\left(I_G + m\frac{l^2}{4} - \frac{m^2l^2}{4(m+M)}\cos^2\theta\right) = m\frac{l}{2}\cos\theta\frac{F}{m+M} - \frac{m^2\frac{l^2}{4}}{M+m}\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta + mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

$\ddot{\theta}$ را در معادله (*) قرار داده و از آن $\dot{x}_2$ را بدست آوریم

(خطی سازی)

$$h(x,y) = h(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \left.\frac{\partial h}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y - y_0)$$

در این نقطه ($\sin\theta = \theta, \cos\theta = 1, \dot{\theta}^2 = 0$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{m}{m+M}\frac{l}{2}\varphi + \frac{F}{m+M} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \dfrac{\frac{ml}{2}\left(gx_3 + \frac{F}{m+M}\right)}{I_G + \frac{ml^2}{4} - \frac{m^2l^2/4}{m+M}} \end{cases}$$

s.a.m

از بین θ مطلوب نظر است

$$\text{خروجی} = \theta = x_3 \qquad [C]_{1\times4} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$y = x_3 \qquad D_{1\times1} = 0$$

$$[A]_{4\times4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m\frac{l}{2}g}{I_G + \frac{ml^2}{4} - \frac{m^2l^2/4}{(m+M)}}\left(\dfrac{m}{m+M}\dfrac{l}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{m\frac{l}{2}g}{I_G - \frac{m^2l^2/4}{m+M} + \frac{ml^2}{4}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B]_{4\times1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m+M}\left(1 + \dfrac{m\frac{l}{2}g\,\frac{m}{M+m}\,\frac{l}{2}}{I_G + m\frac{l^2}{4} - \frac{m^2l^2/4}{m+M}}\right) \\ 0 \\ \dfrac{m\frac{l}{2}\,\frac{1}{m+M}}{I_G + m\frac{l^2}{4} - \frac{m^2l^2/4}{m+M}} \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن تابع تبدیل بین $\theta(s)$ و $F(s)$ لازم است (کافی) از معادله چهارم لاپلاس بگیریم (در خطی)

$$s^2\theta(s) = \underset{(\alpha_1)}{\underset{A}{\bigcirc}}\,\theta(s) + \underset{\left(\alpha_1 \frac{g}{m+M}\frac{1}{g}\right)}{\underset{B}{\bigcirc}}\,F(s) \Rightarrow \boxed{\frac{\theta(s)}{F(s)} = \checkmark}$$

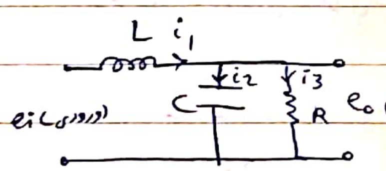
بخش دوم فصل ۳

۳-۲- مدلسازی سیستم های الکتریکی

برای مدلسازی سیستم های الکتریکی از قانون ولتاژ (KVL) و جریان (KCL) استفاده می‌کنیم.

* نکته: جریان سلف و ولتاژ خازن در تحلیل سیستم های الکتریکی به عنوان متغیرهای حالت انتخاب می‌شوند.

مثال) سیستم الکتریکی مقابل را در نظر بگیرید.



الف) معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم را بیابید و تعداد متغیرهای حالت را حساب کنید.

ب) معادلات را به فرم فضای حالت بنویسید.

ج) تابع تبدیل بین ورودی و خروجی را حساب کنید.

$$\begin{cases} e_i - L\dfrac{di_1}{dt} - e_o = 0 \Rightarrow \dfrac{di_1}{dt} = \dfrac{e_i - e_o}{L} \quad \text{I} \\ \left.\begin{array}{l} i_1 = i_2 + i_3 \\ i_2 = C\dfrac{de_o}{dt} \\ e_o = Ri_3 \end{array}\right\} \Rightarrow i_1 = C\dfrac{de_o}{dt} + \dfrac{e_o}{R} \quad \text{II} \end{cases}$$

نکته: تعداد متغیر معمولا به تعداد خازن ها و سلف ها می‌گذاریم.

* نکته: چرا $x_2 = \frac{di_1}{dt}$ نیست؟ چون در فرم دیفرانسیل مرتبه ۲ وجود ندارد ولی در مکانیک چون داشتیم تا وجود داشت و گذاشتیم.

$$\begin{cases} x_1 = i_1 \\ x_2 = e_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{e_i - x_2}{L} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 \end{cases}$$

تعداد متغیر حالت $n = 2$

$$[A]_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad [B]_{2\times1} = \{B\}_{2\times1} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [C]_{1\times2} = [0 \quad 1] \quad D = 0$$

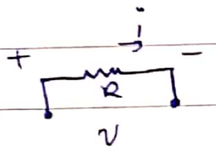
$G(s) = ?$ راه اول) $G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D$

راه دوم) لاپلاس: $\begin{cases} SI_1 = \frac{1}{L}(E_i - E_0) \\ I_1 = CSE_0 + \frac{1}{R}E_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{SL}(E_i - E_0) = CSE_0 + \frac{1}{R}E_0 \Rightarrow G(s) = \frac{E_0}{E_i} = \frac{1/L}{CS^2 + \frac{S}{R} + \frac{1}{L}} = \boxed{\frac{R}{RLS^2C + LS + R}}$$

- تعیین تابع تبدیل با استفاده از مفهوم امپدانس معادل

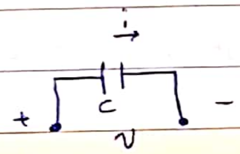
- المان مقاومت



$v = Ri$

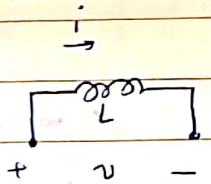
$V(s) = RI(s)$ امپدانس معادل $\frac{V(s)}{I(s)} = R$

- المان خازن



$$\begin{cases} q = Cv \\ \dot{q} = i \end{cases} \Rightarrow C\dot{v} = i \Rightarrow CSV(s) = I(s) \Rightarrow \text{امپدانس معادل} = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{CS}$$

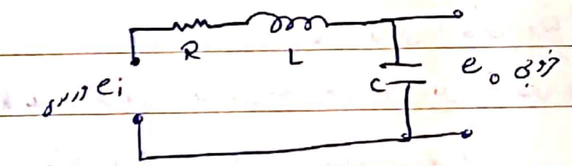
- المان سلف

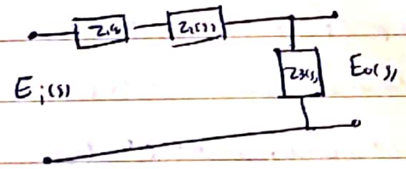


$v = L\frac{di}{dt} \Rightarrow V(s) = LSI(s) \Rightarrow$ امپدانس معادل $= \frac{V(s)}{I(s)} = LS$

مثال) مدار الکتریکی زیر را در نظر بگیرید:

تابع تبدیل بین ورودی و خروجی سیستم بالا را با روش امپدانس معادل بیابید.

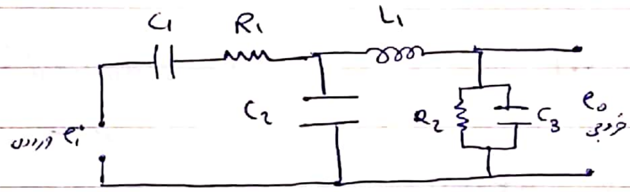




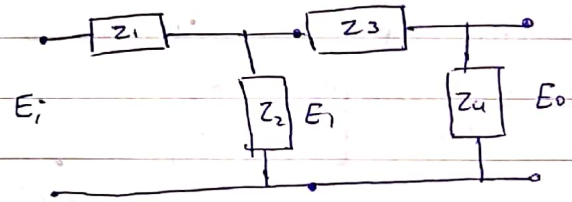
$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \frac{\frac{1}{CS}}{R + LS + \frac{1}{CS}} = \frac{1}{LCS^2 + RCS + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{LCS^2 + RCS + 1}}$$

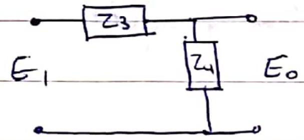
مثال) مدار الکتریکی زیر را در نظر بگیرید



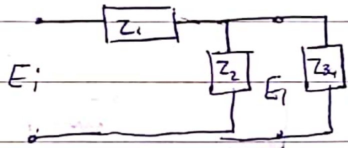
تابع تبدیل بین ورودی و خروجی را با روش امپدانس معادل بیابید.

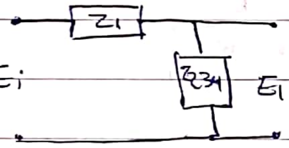


$$\frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{E_0}{E_1}\,\frac{E_1}{E_i}$$



$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{Z_4}{Z_3+Z_4}$$



$\Rightarrow$ 

$$\frac{E_1}{E_i} = \frac{Z_{234}}{Z_1+Z_{234}} \Longrightarrow \frac{E_0}{E_i} = \frac{Z_4}{Z_3+Z_4}\cdot\frac{Z_{234}}{Z_1+Z_{234}}$$

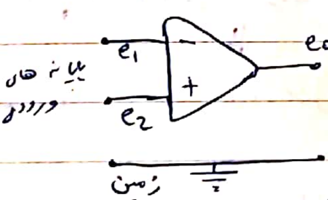
$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{C_1 S} \qquad Z_3 = L_1 S \qquad Z_{34} = Z_3 + Z_4 = L_1 S + \frac{R_2}{R_2 C_3 S + 1}$$

$$Z_2 = \frac{1}{C_2 S} \qquad Z_4 = \frac{R_2}{R_2 C_3 S + 1} \qquad Z_{234} = \frac{Z_2 \times Z_{34}}{Z_2 + Z_{34}} = \frac{L_1 R_2 C_3 S^2 + L_1 S + R_2}{L_1 S (R_2 C_3 S + 1) C_2 S + R_2 C_3 S + 1 + R_2 C_2 S} \quad (*)$$

$$\frac{E_0}{E_i} = \frac{\frac{R_2}{R_2 C_3 S + 1}}{\frac{R_2}{R_2 C_3 S+1} + L_1 S} \times \frac{(*)}{(*) + R_1 + \frac{1}{C_1 S}}$$

آپ-امپ (op-amp). operational amplifier

آپ امپ تقویت کننده عملیاتی جهت تقویت سیگنال خروجی حسگرها استفاده می‌شود.

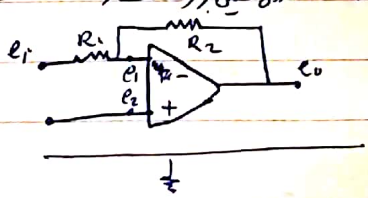


$$e_0 = K(e_2 - e_1)$$

K: برای ورودی های DC و AC (با فرکانس زیر 10Hz) در حدود $10^5 - 10^6$ می‌باشد.

ولتاژهای پایانه های ورودی و خروجی نسبت به زمین سنجیده می‌شوند.

در آپ امپ ایده آل فرض می‌شود که جریان ورودی + و − صفر هستند و در صورتی که پایانه خروجی به یکی از پایانه های ورودی متصل باشد آنگاه با توجه به اینکه K عددی خیلی بزرگ است ($K \to \infty$) می‌توان گفت که ولتاژ پایانه خروجی تاثیری ندارد.



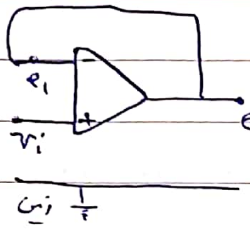
$$\begin{cases} i = \dfrac{e_i - e_1}{R_1} = \dfrac{e_1 - e_0}{R_2} \\ e_0 = K(e_2 - e_1) \Rightarrow \boxed{e_2 = e_1} \end{cases}$$

e_0: محدود، K: ∞

یا یعنی $e_2 = e_1$

- چند مثال کاربردی از آپ امپ

- بافر



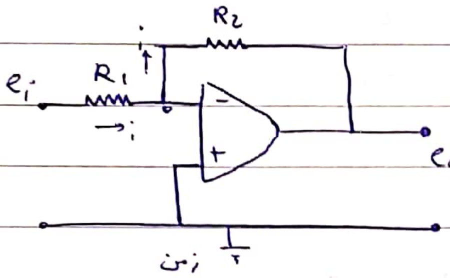
$$e_o = k(v_i - e_1) = k(v_i - e_o)$$

$$\Rightarrow e_o(k+1) = k v_i$$

$$e_o = \frac{k}{k+1} v_i = v_i \Rightarrow \boxed{e_o = v_i}$$

$$k \to \infty$$

- تقویت کننده معکوس . (Inverting Amplifier)



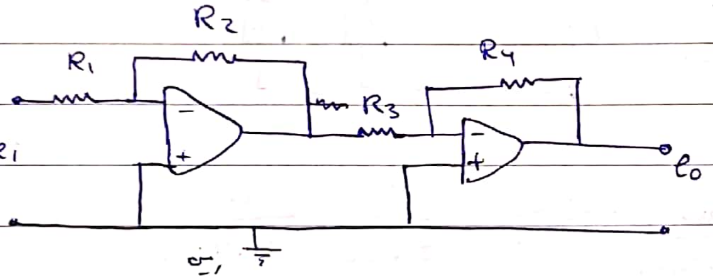
$$i = \frac{e_i - 0}{R_1} = \frac{0 - e_o}{R_2} \Rightarrow \boxed{\frac{e_o}{e_i} = -\frac{R_2}{R_1}}$$

منفی هم - را حذف کنیم

$\Downarrow$

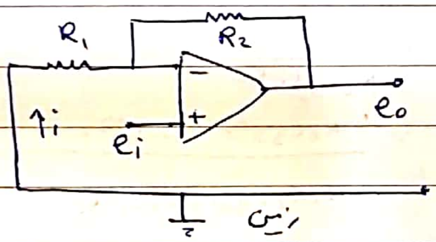
non Inverting amplifier .

#1



$$\boxed{\frac{e_o}{e_i} = \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1}}$$

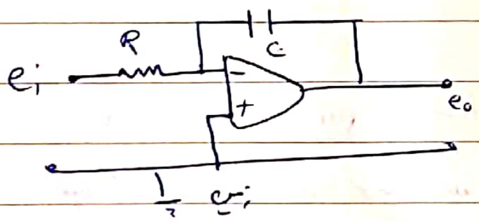
#2



$$i = \frac{0 - e_i}{R_1} = \frac{e_i - e_o}{R_2}$$

$$\Rightarrow e_o = \frac{R_2}{R_1} e_i + e_i \Rightarrow \boxed{e_o = e_i\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)}$$

~~[illegible]~~ انتگرال گیر



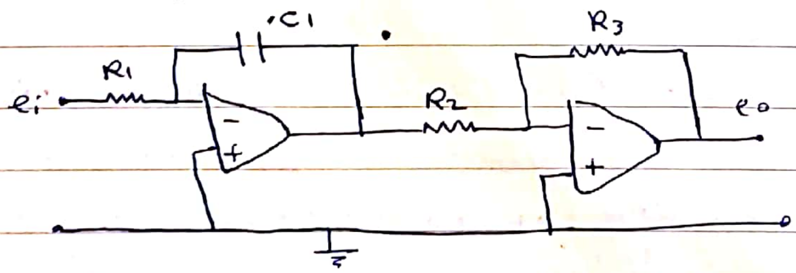
$$i = \frac{e_i - 0}{R}$$

$$i = C\frac{d}{dt}(0 - e_o) \Rightarrow \frac{e_i}{R} = -C\frac{de_o}{dt} \Rightarrow \boxed{e_o = -\frac{1}{RC}\int e_i\,dt}$$

حال می‌خواهیم - را حذف کنیم

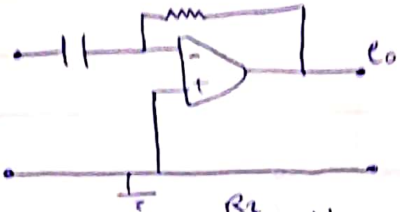
$\Downarrow$

- انتگرال گیر بدون معکوس کردن



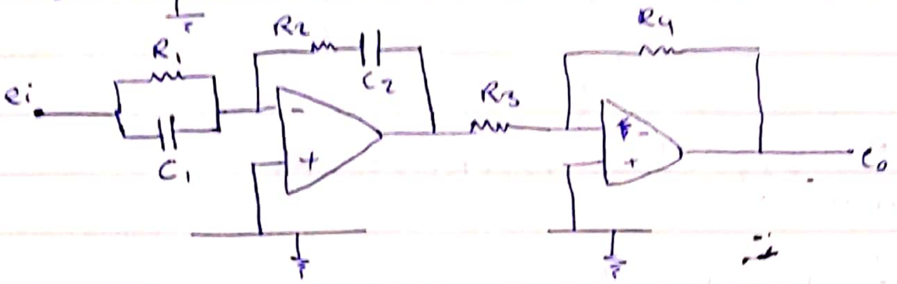
$$e_o = \frac{R_3}{R_2} \frac{1}{R_1 C_1} \int e_i\,dt$$

- مشتق گیر (معکوس کننده)

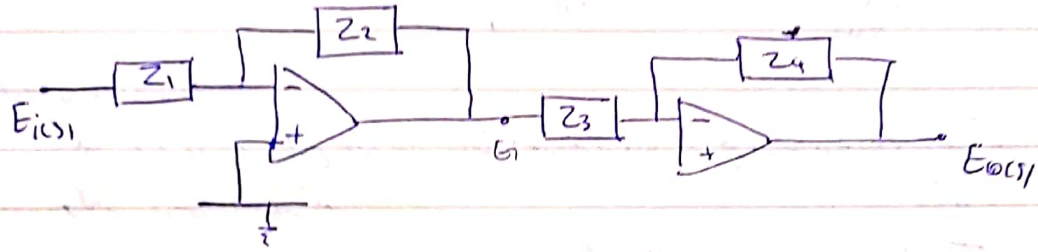


$$i = c\frac{d}{dt}(e_i - 0) = \frac{0 - e_o}{R} \longrightarrow \boxed{e_o = -RC\frac{d}{dt}e_i}$$

- طراحی کنترلر PID با آپ امپ



برای ترکیب بهتر $\frac{e_o}{e_i}$ را به لاپلاس میبریم.



$$\frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = \frac{E_{o(s)}}{E_{1(s)}}\cdot\frac{E_{1(s)}}{E_{i(s)}} = -\frac{Z_4}{Z_3}\times-\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{Z_4Z_2}{Z_3Z_1}$$

$$Z_1 = \frac{R_1\cdot\frac{1}{C_1S}}{R_1+\frac{1}{C_1S}} = \frac{R_1}{R_1C_1S+1} \qquad Z_2 = R_2+\frac{1}{C_2S} = \frac{R_2C_2S+1}{C_2S} \qquad Z_3 = R_3 \qquad Z_4 = R_4$$

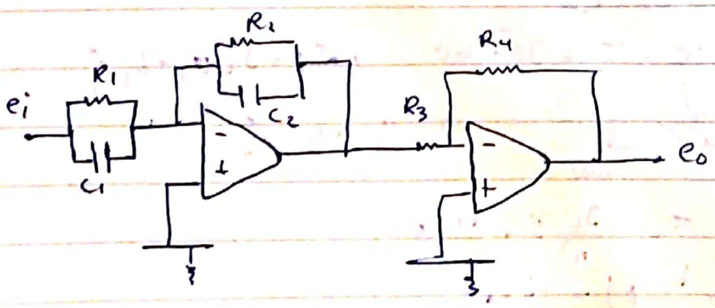
$$\frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = \frac{\frac{R_2C_2S+1}{C_2S}\cdot R_4}{R_3\times\frac{R_1}{R_1C_1S+1}} = \frac{R_4}{R_1R_3C_2S}\times(R_2C_2R_1C_1S^2+(R_1C_1+R_2C_2)S+1) = \frac{R_4}{R_1R_3C_2}(R_2C_2R_1C_1S+R_1C_1+R_2C_2+\frac{1}{S})$$

$$\Rightarrow \frac{E_{o(s)}}{E_{i(s)}} = \frac{R_4}{R_1R_3C_2}(R_1C_1+R_2C_2)\left(1+\frac{R_1C_1R_2C_2}{R_1C_1+R_2C_2}S+\frac{1}{R_1C_1+R_2C_2}\frac{1}{S}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{E_o}{E_i} = k_p\left(1+T_dS+\frac{1}{T_i}\frac{1}{S}\right)}$$

- طراحی کنترلر lead و lag با استفاده از آپ امپ

lead: برای Prediction

lag: خطای حالت ماندگار را جبران میکند



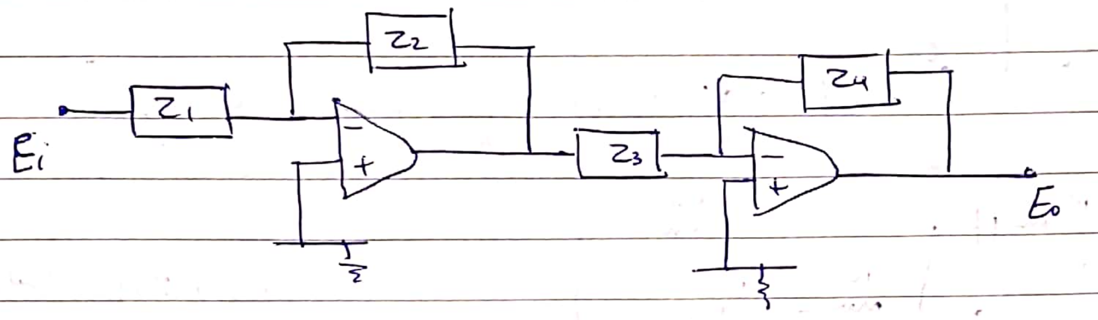
فرم کنترلر lead و lag

zero: صورت را صفر میکند

$$k\left(\frac{S+Z}{S+P}\right)$$

$$\begin{cases} \text{lead} & P > Z > 0 \\ \text{lag} & P < Z > 0 \end{cases}$$

pole: مخرج را صفر میکند



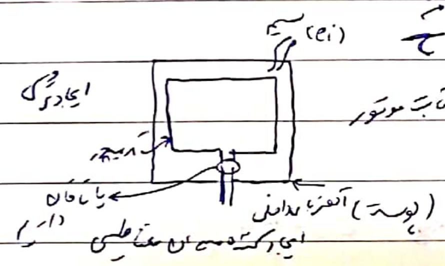
(انتقال تابع) $\dfrac{E_o(s)}{E_i(s)} = \dfrac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} \rightarrow Z_1 = \dfrac{R_1}{R_1C_1S+1}$ و $Z_2 = \dfrac{R_2}{R_2C_2S+1}$ و $Z_3 = R_3$ و $Z_4 = R_4$

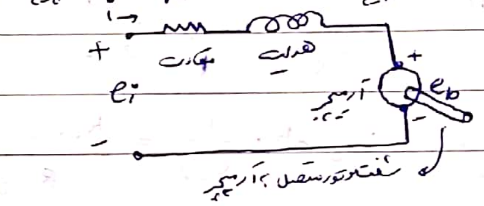
$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} \boxed{\frac{E_o}{E_i} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2}\left(\frac{S+\frac{1}{R_1C_1}}{S+\frac{1}{R_2C_2}}\right) = K\left(\frac{S+Z}{S+P}\right)}$$

- مدل سازی موتورهای الکتریکی

یکی از پرکاربردترین انواع موتورهای DC ، موتورکنترل ولتاژ آرمیچر است. در این موتور جهت کنترل دور خروجی موتور کافیست بتوانیم ولتاژ آرمیچر را تنظیم کنیم.

$\tau = K a i$ (گشتاور) (زاویه) — جریان سیم پیچ — ثابت موتور





بزرگی میدان مغناطیسی دائمی و همچنین دور سیم پیچ

بستگی به هر سه سیم پیچ

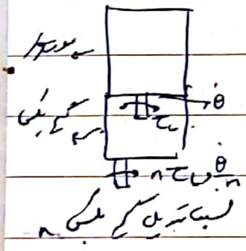
سرعت زاویه ای آرمیچر

$e_b = k.\omega$ ← افزایش میدان مغناطیسی $k\uparrow$

back mmf — نیروی محرکه بازگشتی

back mmf : هرگاه یک سیم داخل میدان مغناطیسی حرکت کند، یک نیروی محرکه الکتریکی ۲ سر سیم القاء می شود که به آن e_b می گویند.

معمولاً چون دور شفت خروجی بالاست از یک گیربکس استفاده می شود که دور ما را کاهش دهد و مطلوب سازد.



θ : زاویه شفت موتور متصل به آرمیچر

$\dot{\theta}$: سرعت زاویه ای " " " "

J : ممان اینرسی معادل آرمیچر و شفت متصل به آن

b : میرایی معادل که شفت متصل به آرمیچر می بیند. (یاتاقان ایجاد می شود)

$$e_i - Ri - L\frac{di}{dt} - e_b = 0$$

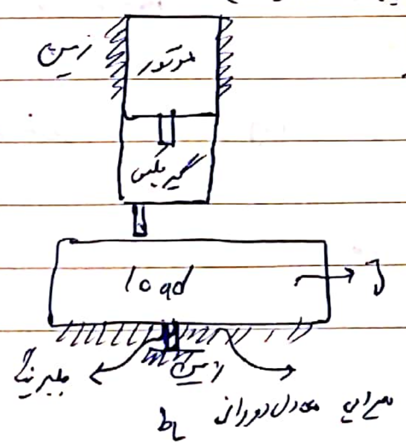
$$e_b = k.\omega$$

$$\tau - \tau_L = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} \quad , \quad n\tau_L = J_L\ddot{\theta}_L + b_L\dot{\theta}_L$$

τ: گشتاوری که توسط میدان مغناطیسی به آرمیچر وارد می شود.

τ_L: گشتاور وارد شده از طرف load

$$\dot{\theta}_L = \frac{\dot{\theta}}{n} \quad , \quad \ddot{\theta}_L = \frac{\ddot{\theta}}{n}$$



$$\tau_L = \frac{J_L}{n^2}\ddot{\theta} + \frac{b_L}{n^2}\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau - \left(\frac{J_L}{n^2}\ddot{\theta} + \frac{b_L}{n^2}\dot{\theta}\right) = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} \\ \tau = \left(J + \frac{J_L}{n^2}\right)\ddot{\theta} + \left(b + \frac{b_L}{n^2}\right)\dot{\theta} \\ \tau = k a i \\ e_i - Ri - L\frac{di}{dt} - e_b = 0 \quad , \quad e_b = k.\omega \end{cases}$$

s.a.m

$$\Rightarrow \begin{cases} k_a i = J_{eq}\ddot{\theta} + b_{eq}\dot{\theta} \\ e_i - Ri - L\frac{di}{dt} - k\dot{\theta} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} k_a I(s) = (J_{eq}s^2 + b_{eq}s)\,\theta(s) \\ E_i(s) - (R+LS)\,I(s) - kS\,\theta(s) = 0 \end{cases}$$

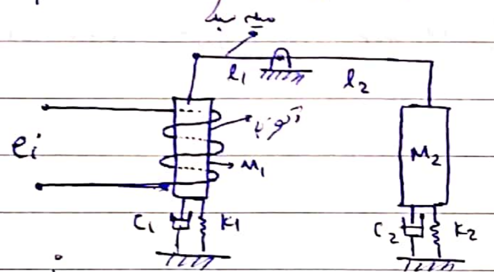
$$\Rightarrow E_i(s) - \frac{(R+LS)}{k_a}(J_{eq}s^2 + b_{eq}S)\,\theta(s) - kS\,\theta(s) = 0$$

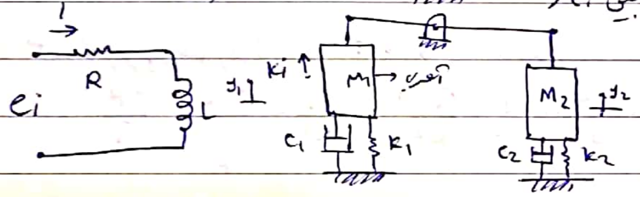
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\theta(s)}{E_i(s)} = \dfrac{k_a}{(R+LS)(J_{eq}S^2 + b_{eq}S) + kS} & (\text{خروجی موتور الکتریکی}) \\[2ex] \dfrac{\theta_L(s)}{E_i(s)} = \dfrac{k_a/n}{(R+LS)(J_{eq}S^2 + b_{eq}S) + kS} & (\text{خروجی روی load}) \end{cases}$$

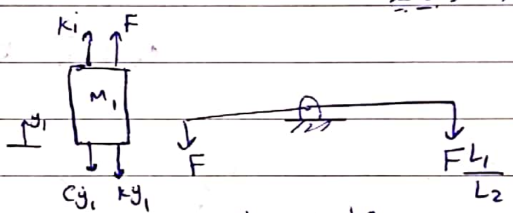
* از این تابع تبدیل در plant استفاده می‌شود.

مثال) سیستم الکترومکانیکی زیر را در نظر بگیرید.

هدف در سیستم مقابل این است که با کنترل ولتاژ سلونوئید بتوان مکان جرم M_1 را تنظیم کرد. مقاومت سیم پیچ R و ضریب inductance آن L است. اگر جریان i از داخل سیم پیچ بگذرد، نیروی F=ki به آهنربای M_1 وارد می‌شود. معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم و همچنین تابع تبدیل بین e_i و مکان جرم M_1 را بیابید.



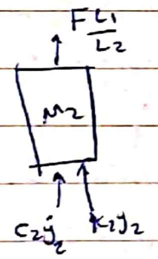




$$e_i - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$E_i - RI - LSI = 0$$

$$y_2 = y_1\frac{L_2}{L_1}$$



$$\longrightarrow \begin{cases} M_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 + k_1y_1 = F + ki \\ M_2\ddot{y}_2 + c_2\dot{y}_2 + k_2y_2 = -F\frac{L_1}{L_2} \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 + k_1y_1 = -(M_2\ddot{y}_2 + c_2\dot{y}_2 + k_2y_2)\frac{L_2}{L_1} + ki \\ \Rightarrow M_{eq}\ddot{y}_1 + C_{eq}\dot{y}_1 + K_{eq}y_1 = ki \end{array} \right.$$

$$M_{eq} = M_1 + M_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 \qquad C_{eq} = C_1 + C_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 \qquad K_{eq} = k_1 + k_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2$$

یعنی می‌توانیم فقط یک جرم (Meq) داشته باشیم که با (Ceq و Keq) مشخص شود و بقیه حذف بشه.

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} M_{eq}S^2Y_1(s) + C_{eq}SY_1(s) + K_{eq}Y_1(s) = KI(s)$$

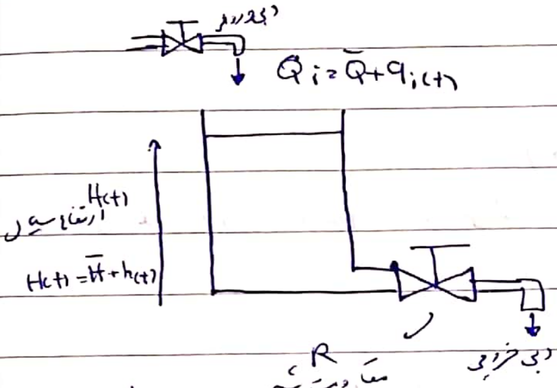
$$\frac{E_i}{R+LS} = I(s) \qquad \Rightarrow \frac{Y_1(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{K}{R+LS}}{M_{eq}S^2 + C_{eq}S + K_{eq}}$$

sam

فصل ۴) مدلسازی سیستم های سیالاتی (کنترل سطح سیال داخل مخزن) و هیدرولیکی

- مدلسازی سیستم های سیالاتی (liquid level)

مخزن نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.

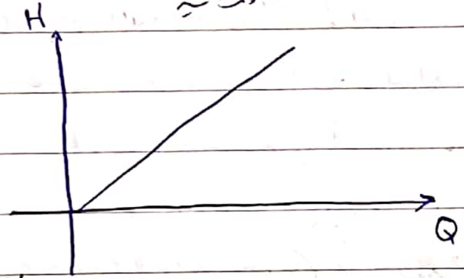


تعریف مقاومت شیر (R):

$$R = \frac{\text{تغییر در اختلاف فشار دو سمت شیر بر حسب ارتفاع}}{\text{تغییر در دبی عبوری از شیر بر حسب } m^3/s} = \frac{dH}{dQ}$$

* هنگامی که steady state باشد R تغییر نمی‌کند (ما این حالت را در نظر می‌گیریم).

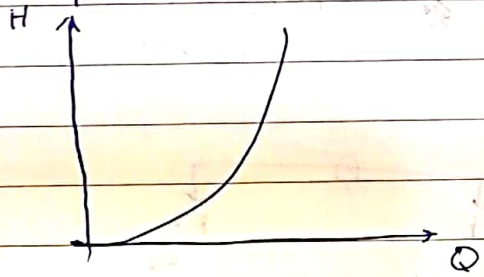
۱- اگر جریان عبوری از شیر laminar باشد.



$Q = KH$

$R = \frac{dH}{dQ} = \frac{1}{K} = \frac{H}{Q}$

۲- اگر جریان عبوری از شیر turbulent باشد.



$Q = K\sqrt{H} \quad R = \frac{dH}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left(\frac{Q^2}{K^2}\right) = \frac{2Q}{K^2} = \frac{2Q}{\frac{Q^2}{H}} = \frac{2H}{Q}$

در هر صورت اگر حول نقطه $\bar{H}$ و $\bar{Q}$ سیستم را خطی کنیم داریم:

$H = f(Q)|_{\bar{Q}, \bar{H}}$

$\hookrightarrow \bar{H} + (H - \bar{H}) = f(\bar{Q}) + f'(\bar{Q})(Q - \bar{Q}) \Rightarrow \cancel{\bar{H}} + h = \cancel{f(\bar{Q})} + Rq \Rightarrow R = \frac{h}{q}$ → این رابطه همواره برقرار است چه در حالت جریان لمینار و چه توربولنت تغییرات حول نقطه کاری

تغییر ارتفاع حول نقطه کاری

تعریف ظرفیت مخزن (C):

$$C = \frac{\text{تغییر در حجم سیال داخل مخزن}}{\text{تغییر در ارتفاع سیال داخل مخزن}} = \frac{dV}{dH}$$

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = C \cdot \frac{dH}{dt}$

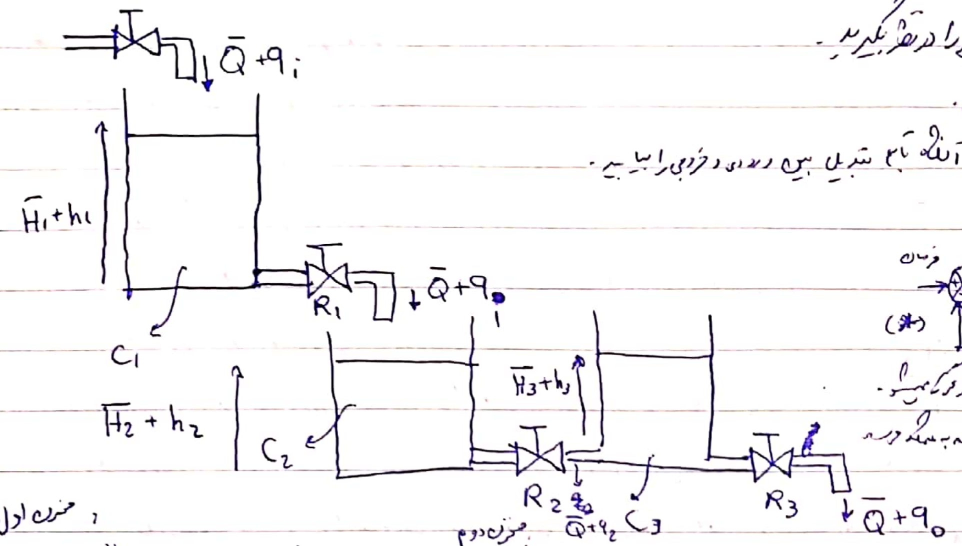
دبی خالص ورودی به مخزن شکل عکس

$= C\,dH \Rightarrow (q_i - q_o) = C\frac{dh}{dt} \Rightarrow C\frac{dh}{dt} = q_i - q_o$ or $\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{q_i - q_o}{C}}$

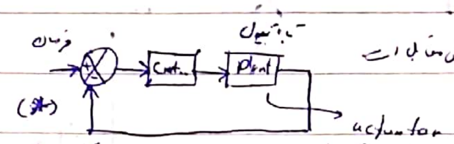
مثال) سیستم سیالاتی (کنترل ارتفاع داخل مخزن) زیر را در نظر بگیرید.

معادلات حاکم بر این سیستم را استخراج نمایید.

۱) اگر ورودی Q_i و خروجی H_3 باشد آنگاه تابع تبدیل بین ورودی و خروجی را بیابید.



نکته: به شکل مقابل است



از این نکته که در سیستم از جابجایی در نظر گرفته می‌شود.

شرایط ما ورودی h مطلوب است و خروجی q است که به سیستم می‌رسد.

مخزن اول:

$$C_1\frac{dh_1}{dt}=q_i-q_1 \ , \ \frac{h_1}{q_1}=R_1 \qquad C_2\frac{dh_2}{dt}=q_1-q_2 \ , \ \frac{h_2-h_3}{q_2}=R_2 \qquad C_3\frac{dh_3}{dt}=q_2-q_0 \ , \ \frac{h_3}{q_0}=R_3$$

از سه رابطه L بگیریم:

$$\begin{cases} C_1 S H_1(s) = Q_i(s) - Q_1(s) \ , \ H_1(s) = R_1 Q_1(s) \\ C_2 S H_2(s) = Q_1(s) - Q_2(s) \ , \ H_2(s) - H_3(s) = R_2 Q_2(s) \\ C_3 S H_3(s) = Q_2(s) - Q_0(s) \ , \ H_3(s) = R_3 Q_0(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 S R_1 Q_1(s) = Q_i(s) - Q_1(s) \rightarrow Q_i(s) = Q_1(s)(R_1C_1S+1) \Rightarrow Q_1(s) = \frac{Q_i(s)}{1+R_1C_1S}$$

$$\Rightarrow C_2 S (R_2 Q_2(s) + H_3(s)) = \frac{Q_i(s)}{1+R_1C_1S} - Q_2(s) \Rightarrow Q_2(s)(R_2C_2S+1) = \frac{Q_i(s)}{1+R_1C_1S} - C_2 H_3(s) S$$

$$\Rightarrow Q_2(s) = \frac{Q_i(s)}{(1+R_1C_1S)(1+R_2C_2S)} - \frac{C_2S}{1+R_2C_2S}H_3(s)$$

$$\Rightarrow C_3 S H_3(s) = \frac{Q_i(s)}{(1+R_1C_1S)(1+R_2C_2S)} - \frac{C_2S}{1+R_2C_2S}H_3(s) - \frac{H_3(s)}{R_3}$$

$$\Rightarrow H_3(s)\left(C_3S + \frac{C_2S}{1+R_2C_2S} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{1}{(1+R_1C_1S)(1+R_2C_2S)}Q_i(s)$$

$$\Rightarrow H_3(s) = \boxed{\frac{R_3}{(1+R_1C_1S)(1+R_2C_2S+R_3(R_2C_2S+1)C_3S+R_3C_2S)}} Q_i(s)$$

این Q_i با Q_1 اولیه تفاوت دارد چون که این بالا سیال است.

$$G(s) \Longrightarrow$$ به جای plant قرار می‌دهیم.

سئال) سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید.

الف) معادلات حاکم بر سیستم را بیابید

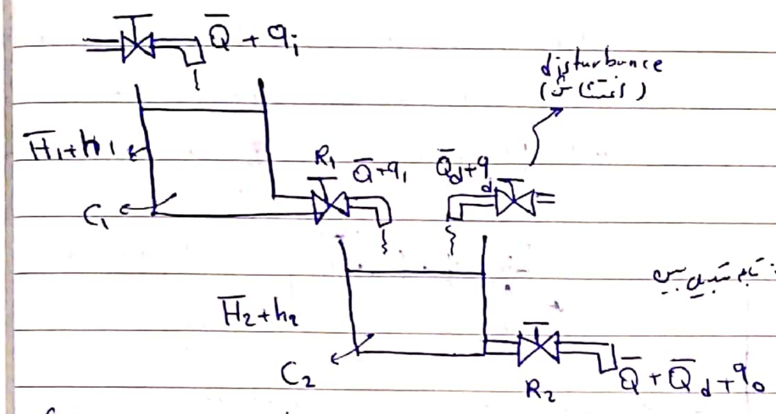
ب) معادلات را به فضای لاپلاس ببرید.

ج) بلوک دیاگرام سیستم را رسم نمایید.

د) فرض کنید q_i ورودی سیستم کنترلی و h_2 خروجی آن باشد. تابع تبدیل بین ورودی q_i و خروجی h_2 را بیابید.

ه) تابع تبدیل بین ورودی اغتشاش q_d و خروجی را بیابید.

و) اگر ورودی سیستم (که در واقع خروجی کنترلر است) توسط یک کنترلر تناسبی با ضریب بهره K_p تنظیم شود و ورودی اغتشاش پله واحد باشد (q_d پله واحد باشد) و بخواهیم خروجی مطلوب ورودی (desired) h_{2d} تنظیم شود خطای ماندگار را بیابید.



(الف)

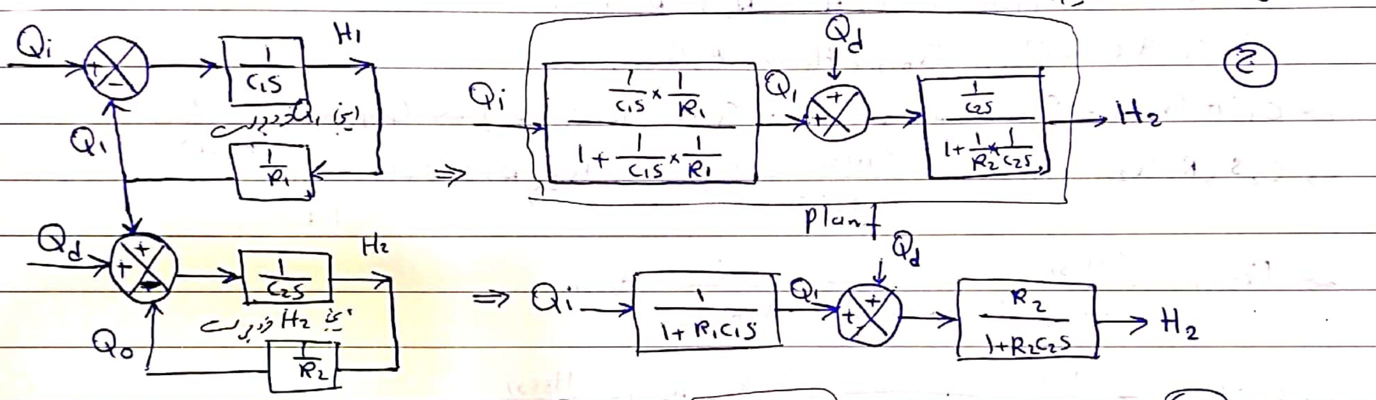
$$\begin{cases} C_1\dfrac{dh_1}{dt}=q_i-q_1 \;,\; \dfrac{h_1}{q_1}=R_1 \\ C_2\dfrac{dh_2}{dt}=q_1+q_d-q_o \;,\; \dfrac{h_2}{q_o}=R_2 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} C_1 s H_1(s)=Q_i-Q_1 \;,\; H_1(s)=R_1 Q_1(s) \\ C_2 s H_2(s)=Q_1+Q_d-Q_o \;,\; H_2=R_2 Q_o \end{cases}$$

برای راحتی نوشتن (s) ها را نمی نویسیم.

(ج)



(د)
$$\frac{H_2}{Q_i}=\boxed{\frac{R_2}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}}$$

(ه)
$$\frac{H_2}{Q_d}=\boxed{\frac{R_2}{R_2C_2s+1}}$$

(و)

در واقع $\Rightarrow H_2=\dfrac{R_2}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}Q_i+\dfrac{R_2}{R_2C_2s+1}Q_d$

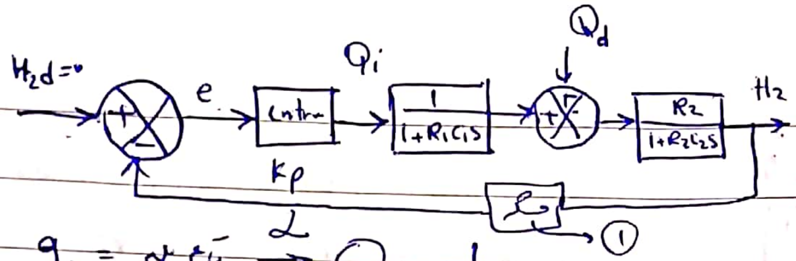
[illegible]

(ادامه در دفتر دیگر)

s.a.m

ادامه فصل ۴)

ادامه سؤال مخزن کوپل (و)



$q_d =$ تابع پله $\Rightarrow Q_d = \frac{1}{S}$

$$\Rightarrow H_2 = \frac{R_2}{(1+R_1C_1S)(1+R_2C_2S)} k_p(\cancel{H_{2d}} - H_2) + \frac{R_2}{R_2C_2S+1} \times \frac{1}{S}$$

$$\Rightarrow H_2\left(1+\frac{k_pR_2}{(1+R_1C_1S)(1+R_2C_2S)}\right) = \frac{R_2}{S(1+R_2C_2S)}$$

$$\Rightarrow H_2 = \frac{R_2(R_1C_1S+1)}{S\big((R_1C_1S+1)(R_2C_2S+1)+k_pR_2\big)} \qquad e = \cancel{h_{2d}} - h_2 = -h_2(t)$$

خطای ماندگار یعنی $e(\infty)$

دو راه داریم برای کاهش

یک راه افزایش ضریب و راه دیگر α است

که طولانی و سخت است

$$e(\infty) = -h_2(\infty) = \boxed{-\lim_{s\to 0} S H(s) = \frac{-R_2}{1+k_pR_2}}$$

$$F(s) \to f(\infty) \Rightarrow f(\infty) = \lim_{s\to 0} S F(s)$$

نکته: می‌خواهیم این خطای ماندگار را به صفر نزدیک کنیم یک راه این است که kp را زیاد کنیم که گران می‌شود و اقتصادی نیست، راه دیگر این است که ترم انتگرال گیر را به کنترلر اضافه کنیم $k_p \to k_p + \frac{k_I}{S}$

- مدلسازی سیستم‌های هیدرولیکی

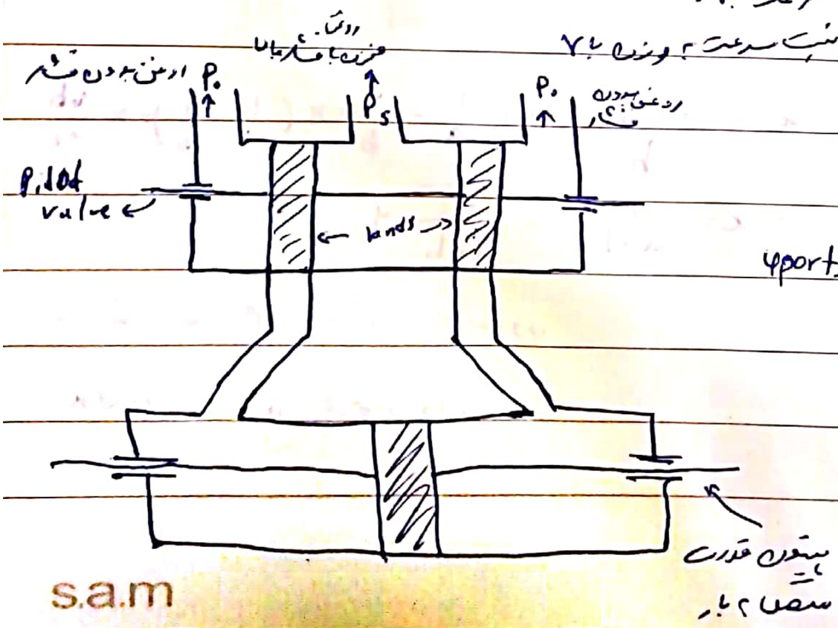
سیستم‌های هیدرولیکی در صنعت کاربردهای فراوانی دارند از جمله ماشین‌های راه‌سازی، بالابرها، پرس‌ها،

سطوح کنترلی هواپیماها ...

مزایای سیستم‌های هیدرولیکی:
- دقت بالا
- سرعت بالا (زمان پاسخ‌دهی سریع)
- نسبت سرعت به وزن بالا

- معرفی یک سروو موتور هیدرولیکی

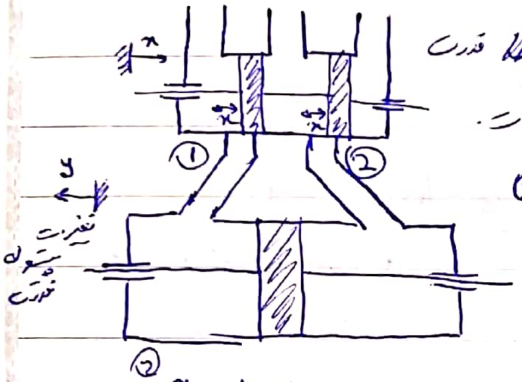
- سروو موتور هیدرولیکی نوع 4ports_2lands



s.a.m

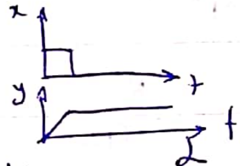
فرضیات: ⊛
۱- روغن incompressible
۲- حالت zero-lap داریم یعنی $w=t$
۳- اینرسی بار به نسبت نیروی که روی پیستون قدرت اعمال می‌شود خیلی کوچک است.

فرض کنید pilot valve به اندازه کوچک x به سمت راست حرکت کند.



در این حالت روغن پرفشار از طریق روزنه ② به سمت راست پیستون قدرت منتقل می‌شود و روغن کم‌فشار از روزنه ② سمت چپ روغن در تماس است.

می‌توان نشان داد دبی عبوری از روزنه ② با فرضیات ⊛ به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\left.\begin{array}{l} \text{دبی جرمی } q = K_1 x \\ ① \; q = \rho A \dfrac{dy}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho A \frac{dy}{dt} = k_1 x(t) \Rightarrow \rho A\, s\, Y(s) = k_1 X(s)$$

AV

کنترلر انتگرالی مستقیم

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \underbrace{\left(\frac{k_1}{\rho A}\right)}_{K} \frac{1}{s} = \frac{K}{s}$$

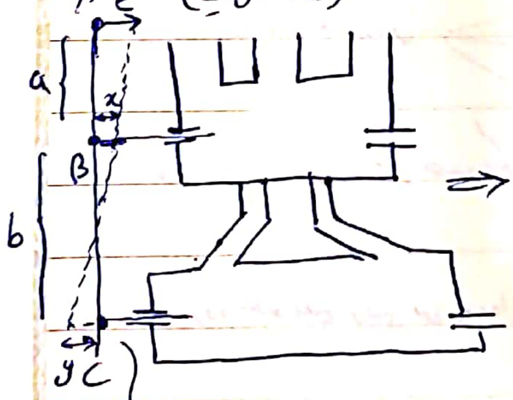
نکته: معمولاً pilot valve خیلی سبک است و از طرفی نیرویی که از روغن به آن وارد می‌شود صفر است. (به علت تقارن) بنابراین به راحتی می‌توان مکان pilot valve را تغییر داد.

در واقع این سیستم هیدرولیک به عنوان یک تابع انتگرالی مورد استفاده می‌باشد. حال می‌خواهیم کنترل پیستون دست‌نشان داشته باشیم چون حالت انتگرالی آن عمدتاً کاربرد ندارد. ارائه می‌شود در صفحه بعدی

کنترل پیستون دست‌نشان

- طراحی کنترلر تناسبی با استفاده از سروو موتور هیدرولیکی

A e (شکل کامل نیست)



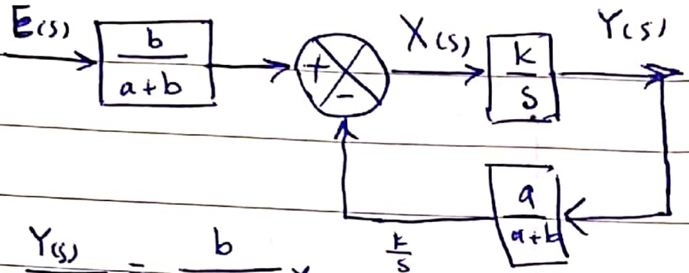
میله سفت با اینرسی قابل صرف‌نظر

$$\Rightarrow \frac{e-x}{a} = \frac{x+y}{b} \Rightarrow e\frac{1}{a} - \frac{y}{b} = x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = x\frac{a+b}{ab}$$

$$\Rightarrow x = \frac{b}{a+b}e - \frac{a}{a+b}y$$

یک رابطه انتگرالی هم از بخش قبل به دست آمده بود.

بلوک دیاگرام به شکل صفحه بعد در می‌آید.



در شرایط نرمال کارکرد موتور هیدرولیکی نشان داده شده داریم:

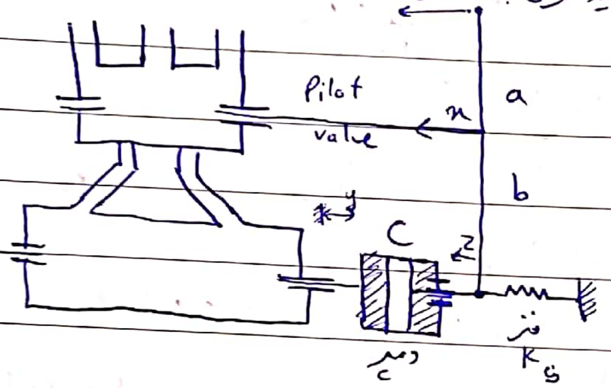
$$\left|\frac{k}{s}\,\frac{a}{a+b}\right| \gg 1$$

جهت وجود k

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a+b} \times \frac{\frac{k}{s}}{1+\frac{k}{s}\cdot\frac{a}{a+b}}$$

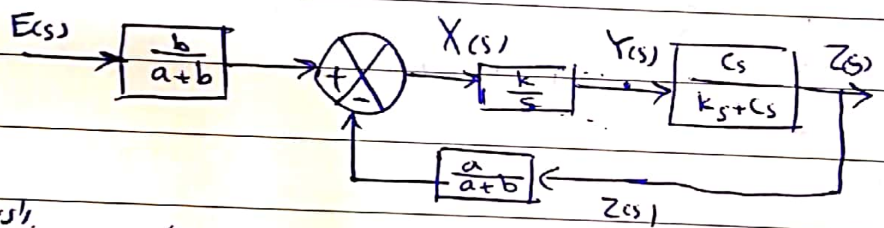
$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a+b}\cdot\frac{\cancel{\frac{k}{s}}}{\cancel{\frac{k}{s}}\cdot\frac{a}{a+b}} = \frac{b}{a} \Longrightarrow \text{تناسبی } P$$

طراحی کنترلر PI با استفاده از سروو موتور هیدرولیکی: $e \cdot A$



$$\frac{e-x}{a} = \frac{x+z}{b}$$

بلوک دیاگرام سیستم



ناچیز

$$m\ddot{z} + k_s z + c(\dot{z}-\dot{y}) = 0 \Longrightarrow (k_s + cs)\,Z(s) = cs\,Y(s)$$

جرم صفر

$$\Rightarrow \frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{cs}{k_s+cs}$$

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a+b}\;\frac{\frac{k}{s}}{1+\frac{k}{s}\,\frac{cs}{k_s+cs}\cdot\frac{a}{a+b}}$$

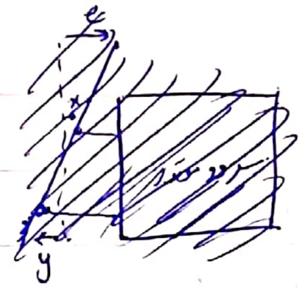
$$\left|\frac{k}{s}\,\frac{cs}{k_s+cs}\,\frac{a}{a+b}\right| \gg 1$$

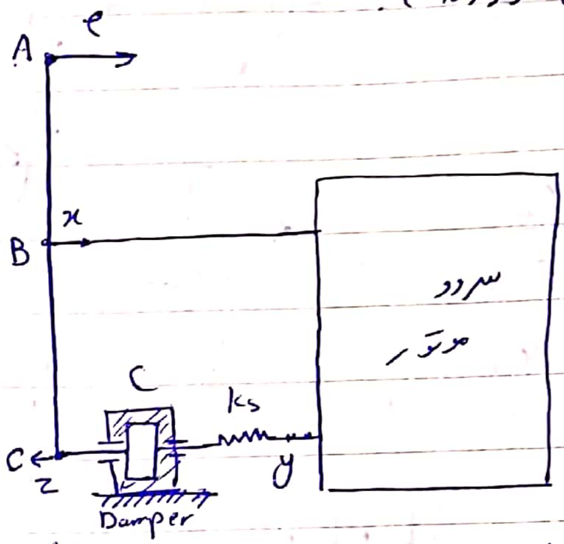
در شرایط نرمال کارکرد سروو موتور داریم:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a+b}\cdot\frac{\frac{k}{s}}{\frac{k}{s}\,\frac{cs}{k_s+cs}\cdot\frac{a}{a+b}} = \boxed{\frac{b}{a}\left(\frac{k_s}{c}\cdot\frac{1}{s}+1\right)} \quad (PI)$$

s.a.m

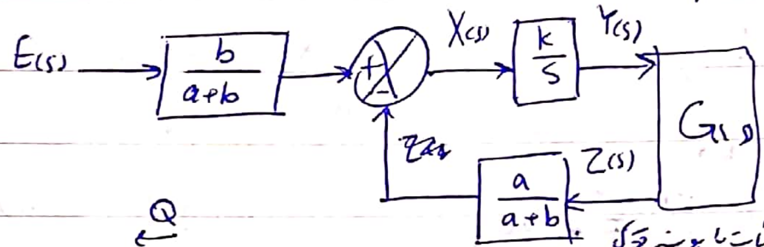
طراحی کنترلر (PD):





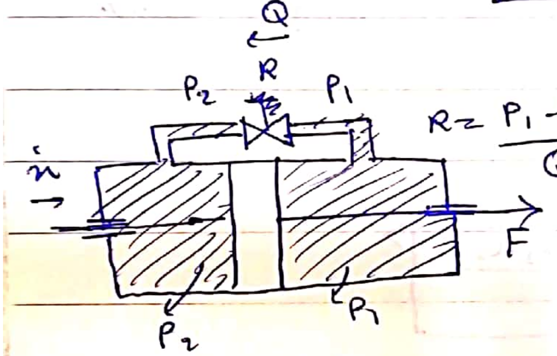
$$\frac{e-x}{a} = \frac{x+z}{b}$$

Block diagram



نکته: کلاً در سروو موتور تا اینی ثابت است
در ارتباط بین Y(s) و Z(s)
همه چیز را از سمت C می‌گیرند

سؤال از اینکه دمپر چه نسبت ثابت تا بوسته حرکت می‌کند



$$R = \frac{P_1 - P_2}{Q}$$

نکته: Dashpot (دمپرانی) چه مکانیزمی دارد؟

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = RQ$$

$$F = \Delta P A = RQA = R(A\dot{x})A = \underbrace{RA^2}_{c}\dot{x} = c\dot{x}$$

برای z

$$\Rightarrow \cancel{m\ddot{z}} + c\dot{z} + k_s(z-y) = 0 \Rightarrow (cs+k_s)Z(s) = k_sY(s)$$

به علت کوچک بودن جرم در این معادله نمی‌آید

$$\Rightarrow \frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{k_s}{k_s + cs}$$

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a+b} \times \frac{\frac{k}{s}}{1 + \frac{k}{s}\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{k_s}{k_s+cs}}$$

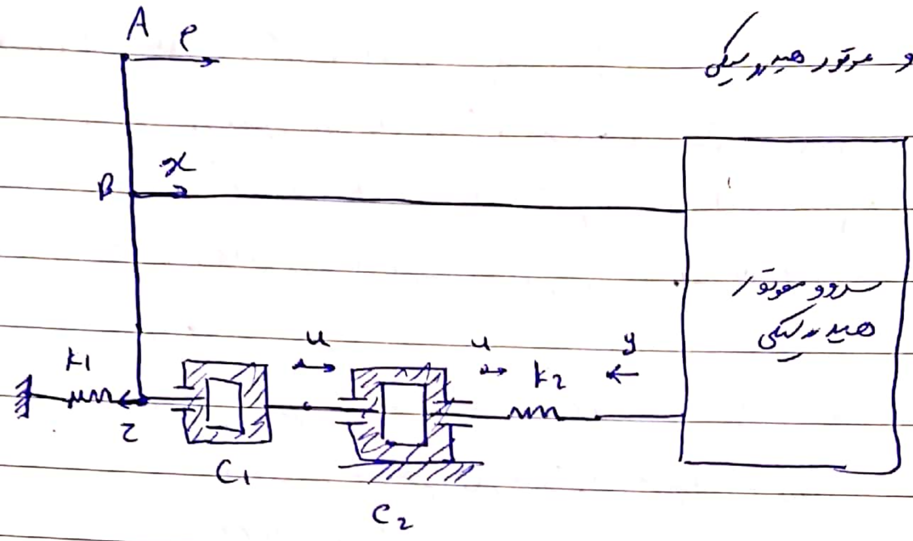
$$\left|\frac{k}{s}\,\frac{a}{a+b}\,\frac{k_s}{k_s+cs}\right| \gg 1$$ در شرایط زیر کار کند

$$\rightarrow \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a+b}\,\frac{\frac{k}{s}}{\frac{k}{s}\,\frac{a}{a+b}\,\frac{k_s}{k_s+cs}} = \frac{b}{a}\,\frac{k_s+cs}{k_s} = \frac{b}{a}\left(1+\frac{c}{k_s}s\right) = \underbrace{\boxed{k_p(1+T_ds)}}_{G(s)}$$

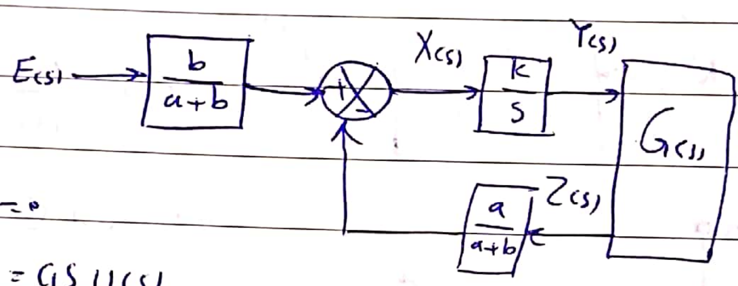
کنترلر تناسبی + مشتق‌گیر

PD

طراحی کنترلر (PID) با سروو موتور هیدرولیکی



$$\frac{e-x}{a}=\frac{x+z}{b}$$



$$\cancel{m\ddot{z}}+k_1 z+c_1(\dot{z}-\dot{u})=0$$

$$\hookrightarrow (k_1+c_1 s)Z(s)=c_1 s\,U(s)$$

$$\cancel{m\ddot{u}}+c_2\dot{u}+k_2(u-y)+c_1(\dot{u}-\dot{z})=0$$

$$\hookrightarrow \begin{cases}((c_1+c_2)s+k_2)U(s)=c_1 s Z(s)+k_2 Y(s)\\ U(s)=\dfrac{k_1+c_1 s}{c_1 s}Z(s)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(((c_1+c_2)s+k_2)\times\frac{k_1+c_1 s}{c_1 s}-c_1 s\right)Z(s)=k_2 Y(s)$$

$$\Rightarrow \frac{Z(s)}{Y(s)}=\boxed{\frac{k_2 c_1 s}{((c_1+c_2)s+k_2)(k_1+c_1 s)-c_1^2 s^2}=G(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{E(s)}=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{\frac{k}{s}}{1+\frac{k}{s}\frac{a}{a+b}\cdot\frac{k_2 c_1 s}{\{((c_2+c_1)s+k_2)\times(k_1+c_1 s)-c_1^2 s^2\}}}$$

بعد ساده سازی

$$\boxed{\frac{Y(s)}{E(s)}=k_p\left(1+T_d s+\frac{1}{T_i s}\right)}$$

s.a.m

Scanned by CamScanner